Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

Łukasz Woźny*

dnia 10 listopada 2006

1 Wprowadzenie

Rozpatrzmy funkcję $f : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem otwartym, a $n \in \mathbb{N}$:

Definicja 1 *Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\bar{x} \in X$* minimum (maksimum) lokalne *wtt., gdy*

$$\exists r > 0 \, \forall x \in K(\bar{x}, r) \quad f(\bar{x}) \leq f(x) \quad (f(\bar{x}) \geq f(x))^{1},$$

gdzie $K(\bar{x}, r)$ jest otwartą kulą o środku w $\bar{x}$ i promieniu r.

Twierdzenie 1 *Jeżeli funkcja f ma w otoczeniu punktu $\bar{x} \in X$ ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu i $f'(\bar{x}) = \mathbf{0}$, to*[2]*:*

- *f ma minimum (maksimum) lokalne w $\bar{x}$, gdy macierz $f''(\bar{x})$ jest dodatnio (ujemnie) określona,*
- *f nie ma ekstremum lokalnego w $\bar{x}$, gdy macierz $f''(\bar{x})$ jest nieokreślona.*

2 Ograniczenia zadane równaniami

Definicja 2 *Niech $f, g_1, g_2, \ldots, g_m : X \to \mathbb{R}$, gdzie $X \subset R^n$ jest zbiorem otwartym a $n > m$. Niech ponadto:*

$$G = [g_1, g_2, \ldots, g_m]^T, \quad M = \{x \in X : G(x) = 0\}.$$

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie $\bar{x} \in M$ minimum (maksimum) lokalne warunkowe *na zbiorze M wtt., gdy:*

$$\exists r > 0 \, \forall x \in M \cap K(\bar{x}, r) \quad f(\bar{x}) \leq f(x) \quad (f(\bar{x}) \geq f(x))^{3}.$$

*lukasz.wozny@sgh.waw.pl.

[1] Jeżeli nierówność jest spełniona dla wszystkich argumentów $x \in X$, to $\bar{x}$ nazywamy minimum (maksimum) globalnym f na X

[2] Symbol **0** oznacza wektor $[0, \ldots, 0]^T$ o wymiarze $1 \times n$.

[3] Jeżeli nierówność jest spełniona dla każdego $x \in M$, to $\bar{x}$ nazywamy minimum (maksimum) globalnym f na M

Poniżej zakładamy, że funkcje f oraz g_i gdzie $i = 1, \ldots, m$ są różniczkowalne.

Definicja 3 *Punkt* $\bar{x} \in M$ *nazywamy* punktem regularnym *ograniczeń wtt.* $rz\, G'(\bar{x}) = m$ *a więc wiersze macierzy* $G'(\bar{x})$ *są liniowo niezależne.*

Definicja 4 Funkcją Lagrange'a *dla problemu ekstremum warunkowego zadanego przez* f *i* G *nazywamy funkcję* $\mathscr{L} : X \to \mathbb{R}$ *o wartościach*

$$\mathscr{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda^T G(x),$$

gdzie $x \in X \subset \mathbb{R}^n$ *jest wektorem zmiennych, a* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ *jest wektorem parametrów* (mnożników Lagrange'a).

Twierdzenie 2 *W problemie zadanym przez różniczkowalne* $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ *funkcja* f *może mieć ekstremum lokalne na* M *tylko w takim* $\bar{x}$*, że:*

- $\bar{x}$ *jest punktem nieregularnym w* M*,*
- $\bar{x}$ *wraz z danym wektorem* $\bar{\lambda}$ *spełnia układ:*

$$\begin{cases} \mathscr{L}'(\bar{x}, \bar{\lambda}) & = \boldsymbol{0}, \\ G(\bar{x}) & = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

Twierdzenie 3 *Jeśli w problemie na ekstremum warunkowe zadanym przez* f *i* G *funkcje* $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ *mają ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu,* $\bar{x}$ *jest punktem regularnym w* M *i* $\mathscr{L}'(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \boldsymbol{0}$ *to:*

- f *ma minimum (maksimum) lokalne na* M*, jeśli forma kwadratowa zadana macierzą* $\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *jest dodatnio (ujemnie) określona na* $C = Ker\, G'(\bar{x})$*,*[4]
- f *nie ma ekstremum lokalnego na* M*, jeśli forma kwadratowa zadana macierzą* $\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *jest nieokreślona na* $C = Ker\, G'(\bar{x})$

Przypomnijmy: $C = \operatorname{Ker} G'(\bar{x}) = \{h \in \mathbb{R}^n : G'(\bar{x})h = \mathbf{0}\}$ a dodatnia (ujemna) określoność $\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})$ na jądrze C oznacza, że $(\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})h|h) > (<)0$ dla $h \in C \setminus \{0\}$.

3 Ograniczenia zadane nierównościami

Rozpatrzmy następujące problem: $\max_{x \in X} f(x)$ przy warunkach $g_i(x) = 0, i = 1, \ldots, m$ oraz $h_j(x) \leq 0, j = 1, \ldots, k$, gdzie $X \subset \mathbb{R}^n$ a $m, k \in \mathbb{N}$ oraz $n \geq k + m$. Zauważmy, gdy $m = 0$ wtedy mamy tylko ograniczenia

[4]W szczególności, gdy macierz $\mathscr{L}''(\bar{x}, \bar{\lambda})$ jest dodatnio (ujemnie) określona.

zadane nierównościami a gdy $k = 0$ wtedy mamy tylko ograniczenia zadane równaniami. Niech $M \subset \mathbb{R}^n$ oznacza zbiór rozwiązań dopuszczalnych, tzn. $M = \{x \in \mathbb{R}^n \; g_i(x) = 0, h_j(x) \leq 0, i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, k\}$. Zakładamy, że funkcje f, $g_i, i = 1, \dots, m$ oraz $h_j, j = 1, \dots, k$ są różniczkowalne.

Definicja 5 *Punkt $\bar{x} \in M$ nazywamy* punktem regularnym *ograniczeń wtt. gdy ograniczenia, które są spełnione dla $\bar{x}$ co do równości są niezależne tzn. gdy wiersze macierzy $D = [G'(\bar{x})H'(\bar{x})]^T$ gdzie $G(\bar{x}) = [g_1(\bar{x}), g_2(\bar{x}), \dots, g_m(\bar{x})]^T$, $H(\bar{x}) = [h_j(\bar{x}), \forall j$ takich, że $h_j(\bar{x}) = 0]^T$ są liniowo niezależne.*

Twierdzenie 4 (Warunki Kuhn'a-Tucker'a) *Niech punkt $\bar{x} \in M$ będzie punktem regularnym ograniczeń. Wtedy istnieją mnożniki $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m$ oraz $\lambda_j \in \mathbb{R}_+, j = 1, \dots, k$, takie, że*

- *dla każdego $l = 1, \dots, n$ zachodzi:*

$$\frac{\partial f(\bar{x})}{\partial x_l} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\bar{x})}{\partial x_l} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial h_j(\bar{x})}{\partial x_l},$$

  oraz

- *dla każdego $j = 1 \dots, k$ zachodzi $\lambda_j h_j(\bar{x}) = 0$, tzn. $\lambda_j = 0$ dla każdego ograniczenia j, które nie jest spełnione co do równości.*

Twierdzenie 5 *Niech $m = 0$ oraz funkcja h_j będzie quasi-wypukła dla każdego j. Niech ponadto funkcja f spełnia warunek $f'(x_1)(x_2 - x_1)^T > 0$ dla każdych x_2, x_1 takich, że $f(x_2) > f(x_1)$. Jeżeli $\bar{x}$ będący punktem regularnym ograniczeń spełnia warunki Kuhn'a-Tucker'a wtedy $\bar{x}$ jest maksimum globalnym funkcji f na zbiorze M.*

Twierdzenie 6 *Niech zbiór M będzie wypukły a funkcja f silnie quasi-wklęsła na M, wtedy istnieje jeden punkt $\bar{x} \in M$ rozwiązujący problem maksymalizacyjny z ograniczeniami.*

Przypomnijmy: f jest quasi-wypukła na zbiorze A wtt. $\forall x_1, x_2 \in A$ oraz $\mu \in [0, 1]$ zachodzi $f(\mu x_1 + (1 - \mu)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Funkcja f jest silnie quasi-wypukła jeżeli nierówność jest ostra dla $\mu \in (0, 1)$ i każdych $x_1 \neq x_2$. Każda funkcja wypukła jest także quasi-wypukła. Funkcja f jest quasi-wklęsła gdy funkcja $-f$ jest quasi-wypukła.

4 Opracowane na podstawie:

[1] Dubnicki W., J. Kłopotowski, T. Szapiro, *Analiza matematyczna. Podręcznik dla ekonomistów*, Warszawa 1999.

[2] Mas-Colell, A., Whinston M.D., Green, J.R., *Microeconomic theory*, Oxford University Press 1995.

Więcej na temat optymalizacji wypukłej można znaleźć w świetnym opracowaniu:

[3] Rockafellar, R.T., *Convex analysis*, Princeton University Press 1997.