Paweł Dziewulski
Łukasz Patryk Woźny

Lista zadań - mikroekonomia II

Lista zadań:

Literatura

[CN00] E. Czarny and E. Nojszewska. *Mikroekonomia. Zbiór zadań.* PWE, 2000.

[FT02] D. Fudenberg and J. Tirole. *Game theory.* MIT Press, Cambridge, 2002.

[MCWG95] A. Mas-Colell, M. D. Whinston, and J. R. Green. *Microeconomic theory.* Oxford University Press, 1995.

[Var97] H. R. Varian. *Microeconomic Analysis.* W. W. Norton & Company, 1997.

Zbiór zadań

1 Teoria konsumenta

Zadanie 1.1 (**[MCWG95]**) *Niech $\succeq$ określa racjonalne preferencje. Udowodnij następujące własności.*

(i) Jeśli $x \succ y \succeq z$, to $x \succ z$.

(ii) $\succ$ jest niezwrotna (nigdy nie zachodzi $x \succ x$) oraz przechodnia (jeśli $x \succ y$ oraz $y \succ z$, wówczas $x \succ z$).

(iii) $\sim$ jest zwrotna ($x \sim x$, $\forall x$), przechodnia (jeśli $x \sim y$ oraz $y \sim z$, wówczas $x \sim z$) i symetryczna (jeśli $x \sim y$, to $y \sim x$).

Zadanie 1.2 (**[MCWG95]**) *Udowodnij następujące własności.*

(i) Jeśli preferencje $\succeq$ są ściśle monotoniczne, to są monotoniczne[1].

(ii) Jeśli preferencje $\succeq$ są monotoniczne, to są lokalnie nienasycone[2].

Zadanie 1.3 (**[Var97]**) *Rozpatrzmy preferencje zdefiniowane na $\mathbb{R}^2_+$ za pomocą $(x_1, x_2) \succ (y_1, y_2)$, jeśli $x_1 + x_2 < y_1 + y_2$. Czy te preferencje są lokalnie nienasycone? Jeśli występują tylko dwa dobra, a ceny na każde z nich są dodatnie, to czy konsument przeznaczy na nie cały swój dochód? Uzasadnij.*

Zadanie 1.4 *Adam osiąga zadowolenie z trzech dóbr: muzyki (m), wina (w) i sera (s). Jego funkcja użyteczności ma postać: $u(m, w, s) = m + 2w + 3s$.*

(i) Zakładając, że konsumpcja muzyki wynosi 10, skonstruuj krzywe obojętności dla $u = 40$ i $u = 70$.

(ii) Pokaż, że krańcowa stopa substytucji (MRS) wina na ser jest stała dla wszystkich wartości m i s na krzywych obojętności.

Zadanie 1.5 *Narysuj krzywą obojętności dla poniższych funkcji użyteczności ($u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$):*

---

[1] Preferencje $\succeq$ nazywamy *monotonicznymi*, jeśli $x, y \in X$ oraz $y \gg x$ implikuje $y \succ x$. Preferencje nazywamy *ściśle monotonicznymi*, jeśli $y \geqslant x$ oraz $y \neq x$, implikuje $y \succ x$. $y \gg x$ zachodzi wtt., gdy dla $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ oraz $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\forall i\ y_i > x_i$.

[2] Preferencje $\succeq$ nazywamy *lokalnie nienasyconymi*, jeśli dla dowolnego $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, istnieje $y \in X$, że $\|y - x\| \leqslant \varepsilon$ oraz $y \succ x$.

(i) $u(x,y) = 3x + y$,

(ii) $u(x,y) = (xy)^{\frac{1}{2}}$,

(iii) $u(x,y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$,

(iv) $u(x,y) = x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}$,

(v) $u(x,y) = \log x + \log y$.

Zadanie 1.6 *Masz następujące funkcje użyteczności:*

(i) $u(x,y) = xy$,

(ii) $u(x,y) = x^2 y^2$,

(iii) $u(x,y) = \log x + \log y$.

Pokaż, że każda z funkcji charakteryzuje się malejącą krańcową stopą substytucji (MRS)*, przy jednoczesnej (i) stałej, (ii) rosnącej i (iii) malejącej użyteczności krańcowej względem każdego dobra.*

Zadanie 1.7 ([MCWG95]) *Naszkicuj wypukłe preferencje zdefiniowane na przestrzeni koszyków dwóch dóbr* $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$*, które są lokalnie nienasycone, ale nie są monotoniczne.*

Zadanie 1.8 *Zadowolenie Kowalskiego z posiadania dóbr* x *i* y *dane jest funkcją użyteczności jak w zadaniu 1.5 (iii). Jakie będzie maksimum użyteczności Kowalskiego, jeśli ceny są równe* $p_x = 3$*,* $p_y = 4$ *i ma on do wydania* $m = 50$ *zł?*

Zadanie 1.9 *Pan A czerpie zadowolenie z picia martini* (m) *w liniowej proporcji do ilości drinków:* $u(m) = m$*. Warunkiem tej satysfakcji jest zmieszanie martini z 2 częściami ginu* (g) *i jedną częścią vermouthu* (v)*. Tym samym prawdziwa funkcja użyteczności pana A to* $u(m) = f(g,v) = \min\{\frac{g}{2}, v\}$*. Narysuj krzywą obojętności w funkcji użyteczności względem* g *i* v *dla różnych poziomów użyteczności. Pokaż, że niezależnie od cen obu dodatków pan A nigdy nie zmieni sposobu mieszania martini.*

Zadanie 1.10 *Niech funkcja użyteczności będzie określona przez* $u(x,y) = (xy)^{\frac{1}{2}}$*. (i) Jeżeli* $p_x = 20$*,* $p_y = 10$*, dochód* $m = 200$ *to ile należy kupić* x *i* y *by zmaksymalizować użyteczność? (ii) Oblicz funkcję indywidualnego popytu na* x *i* y *jako funkcje* p_x *i* p_y*.*

Zadanie 1.11 *Jeśli konsument ma funkcję użyteczności* $u(x,x) = xy^4$ *, to jaką część dochodu wyda on na dobro* y*?*

Zadanie 1.12 *Znajdź optymalny koszyk jeżeli wiadomo, że* $u(x,y) = [x(1+y)]^{\frac{1}{2}}$*,* $p_x = 5$*,*$p_y = 20$*, zaś* $m = 10$*. Co zmieni się jeśli* $m = 100$*?*

Zadanie 1.13 *Znajdź optymalny koszyk dóbr jeśli wiadomo, że funkcja użyteczności ma postać* $u(x,y) = (xy)^{\frac{1}{3}}$*,* $p_x = 0.5$*,* $p_y = 4$*, zaś ograniczenie budżetowe wynosi* $m = 40$*. Jak zmieni się optymalny koszyk jeśli budżet konsumenta podwoi się?*

Zadanie 1.14 *Konsument o którym wiadomo, że ma wypukłe preferencje i dochód w wysokości* 100 *wybrał pewien optymalny koszyk. W koszyku było* 20 *jednostek* x*. Ustalić ile było w koszyku dóbr* y *oraz ich cenę* (p_y)*, jeśli* $p_x = 2$ *oraz w punkcie optimum krańcowa stopa substytucji MRS=1.*

Zadanie 1.15 ([CN00]) *Funkcja popytu konsumenta na dobro* x *jest liniowa. Jego popyt na dobro* x *wynosi* 2*, gdy cena jest równa* 3*. Gdy cena dobra wzrośnie trzy razy, wówczas popyt na* x *spada dwukrotnie. Oblicz, przy jakiej cenie dobra* x *nadwyżka konsumenta zrówna się z jego całkowitymi wydatkami na to dobro.*

Zadanie 1.16 *Rozpatrzmy problem konsumenta, który czerpie użyteczność z konsumpcji (oznaczonej przez* c*) i czasu wolnego (oznaczonego przez* n*). Funkcja użyteczności przyjmuje postać* $u(c,n) = c^{\alpha}n^{1-\alpha}$*,* $\alpha \in (0,1)$*. Konsument ma do dyspozycji jeden dzień, podczas którego może pracować lub odpoczywać (zatem* $l + n = 1$*, gdzie* l *określa część dnia przeznaczonego na pracę). Za każdą godzinę pracy konsument otrzymuje wynagrodzenie* w*, a cały swój dochód przeznacza na dobra konsumpcyjne kupowane po cenie* p*.*

(i) Zapisz problem konsumenta i odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.

(ii) Rozwiąż powyższy problem podając optymalne poziomy konsumpcji, pracy i czasu wolnego obieranych przez konsumenta.

(iii) Czy konsumpcja i czas wolny są dobrami normalnymi? Uzasadnij.

Zadanie 1.17 *W poniższym zadaniu rozwiążesz przykład, w którym przekonasz się, że maksymalizacja użyteczności przy zadanym budżecie oraz minimalizacja wydatków przy zadanym poziomie użyteczności są dwoma sposobami rozwiązania problemu konsumenta (są względem siebie* dualne).

Rozpatrzmy problem konsumenta czerpiącego użyteczność z dwóch dóbr. Jego funkcja użyteczności przyjmuje postać $u(x,y) = x^{\alpha}y^{1-\alpha}$*,* $\alpha \in (0,1)$*, gdzie* x *i* y *to odpowiednio ilości pierwszego i drugiego dobra. Dochód konsumenta wynosi* m*, zaś ceny odpowiednio* p_x *oraz* p_y*.*

(i) *Zapisz problem maksymalizacji problemu konsumenta, przy zadanym budżecie. Zapisz odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.*

(ii) *Rozwiąż powyższy problem podając optymalne ilości dóbr w koszyku.Zapisz funkcję popytu na każde z dóbr.*

(iii) *Niech u^* będzie poziomem użyteczności, który chce osiągnąć konsument. Zapisz problem minimalizacji wydatków konsumenta przy zadanym poziomie użyteczności. Zapisz odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.*

(iv) *Rozwiąż problem z punktu (iii) i udowodnij, że otrzymany wynik jest analogiczny do rozwiązania w problemie (ii).*

Zadanie 1.18 ([Var97]) *Konsument ma użyteczność o postaci $u(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$. Dla zadanych cen p_1 i p_2 oraz budżetu m, jaki jest optymalny koszyk konsumenta? Jaki jest popyt na każde z dóbr?*

Zadanie 1.19 ([MCWG95]) *Rozpatrz problem konsumenta mającego dostęp do trzech dóbr, maksymalizującego użyteczność o postaci $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - b_1)^\alpha (x_2 - b_2)^\beta (x_3 - b_3)^\gamma$, gdzie b_1, b_2, b_3 są dowolnymi stałymi. p_1, p_2. p_3 są odpowiednio cenami dóbr, a m budżetem konsumenta.*

(i) *Dlaczego $\alpha + \beta + \gamma = 1$ jest założeniem nie mającym wpływu na wynik? Skorzystaj z niego przy rozwiązywaniu kolejnych podpunktów.*

(ii) *Zapisz powyższy problem i odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.*

(iii) *Rozwiąż powyższy problem podając optymalne ilości każdego z dóbr w koszyku konsumenta. Wyprowadź funkcję popytu na każde z dóbr.*

(iv) *Udowodnij, (a) że każda z funkcji popytu jest* homogeniczna stopnia zero *względem cen i budżetu*[3] *oraz (b) że popyt na wszystkie dobra spełnia* prawo Walras[4].

Zadanie 1.20 ([Var97]) *Załóżmy, że użyteczność konsumenta przyjmuje postać $U(x_1, x_2) = u(x_1) + x_2$. Dobro 1 jest dobrem, które można konsumować tylko w całości lub wcale (tj. $x_1 = 1$ lub $x_1 = 0$). Ceny dóbr wynoszą odpowiednio p_1 i p_2, a budżet oznaczymy przez m. Dla uproszczenia przyjmijmy $u(0) = 0$ oraz $p_2 = 1$.*

---

[3] Funkcja f jest homogeniczna stopnia zero względem x, jeśli dla dowolnego $\alpha > 0$, $f(\alpha x) = \alpha^0 f(x) = f(x)$.

[4] Funkcje popytu spełniają *prawo Walras* jeśli $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i(p_i, m) = m$, gdzie p_i, $x_i(\cdot)$ i m to odpowiednio cena dobra i, jego funkcja popytu i wysokość budżetu konsumenta

(i) *Rozwiąż powyższy problem podając optymalne ilości dóbr w koszyku konsumenta. Przedstaw funkcję popytu na każde z dóbr.*

(ii) *Dla jakich wartości p_1 konsument obierze $x_1 = 1$?*

Zadanie 1.21 *W tym zadaniu przeanalizujesz międzyokresowy wybór konsumenta żyjącego dwa okresy. Załóżmy, że w pierwszym okresie konsument posiada majątek w wysokości w, który może przeznaczyć na konsumpcję (c_1) i oszczędności (s). W drugim okresie jego majątek jest równy oszczędnościom poczynionym w pierwszym okresie, powiększonym o stałą stopę procentową r, który w całości jest konsumowany. Użyteczność konsumenta ma postać $u(c_1, c_2) = \{c_1^\rho + c_2^\rho\}^{\frac{1}{\rho}}$, gdzie c_1, c_2 oznaczają odpowiednio poziom konsumpcji w pierwszym i drugim okresie.*

(i) *Zapisz problem konsumenta maksymalizującego użyteczność w całym życiu. Zapisz odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.*

(ii) *Rozwiąż problem, określając optymalne poziomy konsumpcji (c_1, c_2) i oszczędności (s).*

(iii) *Jakiego rodzaju dobrami jest konsumpcja w pierwszym i drugim okresie? Czym w tym przypadku jest stopa procentowa r? Jak od niej zależy decyzja odnośnie konsumpcji w obydwu okresach?*

Zadanie 1.22 *Rozpatrzmy problem konsumenta żyjącego dwa okresy. W pierwszym okresie, kiedy jest młody, czerpie użyteczność z konsumpcji w tym okresie i czasu wolnego (niech $u_1(c_1, n_1) = \log c_1 + \log n_1$ będzie użytecznością czerpaną w pierwszym okresie z konsumpcji i czasu wolnego w pierwszym okresie). Konsument decyduje o ilości czasu wolnego i czasu spędzonego w pracy analogicznie jak w zadaniu 1.16 ($l_1 + n_1 = 1$, gdzie l_1 i n_1 to czas poświęcony odpowiednio na pracę i czas wolny w pierwszym okresie). Za każdy dzień pracy konsument otrzymuje wynagrodzenie w, a cały swój dochód poświęca na konsumpcję (c_1) i oszczędności (s).*

W drugim okresie, na emeryturze, konsument nie może pracować $(l_2 = 0)$, a jego konsumpcja (c_2) jest w całości finansowana z oszczędności poczynionych w pierwszym okresie, powiększonych o stopę procentową r. Użyteczność w drugim okresie przyjmie postać $u_2(c_2) = \log c_2$.

(i) *Zapisz problem konsumenta maksymalizującego użyteczność w całym życiu (sumę użyteczności z pierwszego i drugiego okresu). Zapisz odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.*

(ii) *Rozwiąż problem, określając optymalne poziomy konsumpcji* (c_1)*, czasu pracy* (l) *i oszczędności* (s) *w pierwszym okresie, oraz konsumpcji w drugim okresie* (c_2)*.*

(iii) *Jakiego rodzaju dobrem jest konsumpcja w pierwszym i drugim okresie? Jakiego rodzaju dobrem jest czas wolny? Uzasadnij.*

Zadanie 1.23 *Rozpatrz problem jak w zadaniu 1.22, ale tym razem załóżmy istnienie powszechnego systemu emerytalnego* pay as you go*. Wówczas konsument w młodości musi przekazać do funduszu emerytalnego stałą składkę w wysokości* τ*, aby na starość otrzymać* $(1+\phi)\tau$*, gdzie* ϕ *jest stałą stopą przyrostu ludności. Wszystkie pozostałe założenia pozostają jak w zadaniu 1.22.*

(i) *Zapisz powyższy problem oraz odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.*

(ii) *Rozwiąż powyższy problem podając optymalne poziomy konsumpcji w obydwu okresach, czasu wolnego i oszczędności.*

(iii) *Jak otrzymany wynik rożni się od tego otrzymanego w zadaniu 1.22?*

(iv) *Czy powyższy system emerytalny jest efektywny* (*tj. użyteczność konsumenta jest wyższa z systemem niż bez niego*)*? Jeśli tak, to jakie warunki muszą spełniać parametry modelu* (τ *i* ϕ)*?*

Zadanie 1.24 *Rozpatrz ponownie problem z zadania 1.22, ale tym razem niech konsument osiąga użyteczność z czasu wolnego zarówno w pierwszym jak i w drugim okresie. Dodatkowo, może on pracować w drugim okresie, otrzymując za każdą godzinę swojej pracy takie samo wynagrodzenie jak w okresie pierwszym* (*tj.* w)*. Wszystkie pozostałe założenia pozostają jak w zadaniu 1.22.*

(i) *Zapisz powyższy problem i odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.*

(ii) *Rozwiąż powyższy problem podając optymalne poziomy konsumpcji i czasu wolnego w obydwu okresach oraz oszczędności.*

(iii) *Porównaj otrzymane wyniki z tymi z zadania 1.22. Jak różni się konsumpcja w obydwu okresach? Czy możliwość pracy w drugim okresie ma wpływ na oszczędności w pierwszym? Uzasadnij.*

Zadanie 1.25 *Przeanalizuj ponownie problem z zadania 1.24, ale rozwiązując go* metodą rekursywną (*od tyłu*).

(i) *Wpierw rozwiąż problem konsumenta w drugim okresie, traktując oszczędności z okresu pierwszego jako dane (ale dowolne). Otrzymasz w ten sposób optymalny poziom użyteczności w drugim okresie, będący funkcją oszczędności (s).*

(ii) *Następnie rozwiąż problem konsumenta w pierwszym okresie, znajdując optymalne poziomy konsumpcji, czasu wolnego i oszczędności w pierwszym okresie, które maksymalizują sumę użyteczności z pierwszego okresu i zmaksymalizowanej konsumpcji w z drugiego okresu (policzonej w poprzednim punkcie).*

(iii) *Pokaż, że optymalne alokacje i poziom użyteczności są takie same jak w zadaniu 1.24.*

2 Teoria przedsiębiorstwa

2.1 Produkcja

Zadanie 2.1 ([Var97]) *Niech* $Y \subset \mathbb{R}^n$ *będzie* zbiorem produkcyjnym[5], *a* $V(y)$ zbiorem wymaganych czynników produkcji[6]. *Jeśli* $V(y)$ *jest zbiorem wypukłym, to czy odpowiadający mu zbiór możliwości produkcyjnych* Y *musi być wypukły?*

Zadanie 2.2 ([Var97]) *Niech* Y *będzie zbiorem możliwości produkcyjnych. Mówimy, że technologia jest* addytywna *jeśli* $\mathbf{y}, \mathbf{y}' \in Y$ *implikuje* $\mathbf{y} + \mathbf{y}' \in Y$. *Technologię nazywamy* podzielną, *jeśli* $\mathbf{y} \in Y$ *oraz* $0 \leqslant t \leqslant 1$ *implikuje* $t\mathbf{y} \in Y$. *Pokaż, że jeśli technologia jest addytywna i podzielna, to musi być wypukła i wykazywać stałe korzyści skali.*

Zadanie 2.3 ([MCWG95]) *Są dostępne trzy dobra. Dobra 1 i 2 są czynnikami produkcji. Trzecie, którego ilości są określone przez* q, *jest ich produktem. Produkt może być otrzymany przy zastosowaniu dwóch technologii, wykorzystywanych razem lub oddzielnie. Obie technologie nie muszą być liniowe. Pierwsza (odpowiednio druga) technologia wykorzystuje tylko pierwszy (odpowiednio drugi) czynnik produkcji. Wówczas pierwszą (drugą) technologię można scharakteryzować za pomocą funkcji* $\phi_1(q)$ *(odpowiednio* $\phi_2(q)$*), będącą minimalnym poziomem czynnika pierwszego (odpowiednio drugiego), koniecznego do wyprodukowania* q *jednostek produktu. Zakładamy, że* ϕ_1 *oraz* ϕ_2 *są rosnące oraz* $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$.

(i) Określ zbiór możliwości produkcyjnych uwzględniając dwie powyższe technologie.

(ii) Podaj warunki wystarczające na ϕ_1 *i* ϕ_2, *aby zbiór możliwości produkcyjnych był addytywny.*

Zadanie 2.4 ([Var97]) *Dla każdego z poniższych zbiorów wymaganych czynników produkcji sporządź rysunek oraz określ, czy jest on* regularny[7], monotoniczny[8] *i/lub* wypukły $(a, b, y > 0)$.

[5] *Zbiór produkcyjny* nazywamy zbiór zawierający wektory $(y, -\mathbf{x})$, gdzie y jest liczbą określającą poziom produkcji dobra, zaś $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}_{+}$ wektorem czynników produkcji pozwalającym na ich wyprodukowanie.

[6] *Zbiorem wymaganych czynników produkcji* będziemy nazywać zbiór $V(y) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1} : (y, -\mathbf{x}) \in Y\}$, tym samym zbiór wektorów określających ilości poszczególnych czynników pozwalających do wyprodukowania y jednostek dobra.

[7] $V(y)$ jest *regularny*, jeśli jest domknięty i niepusty dla $\forall y > 0$.

[8] $V(y)$ jest monotoniczny, jeśli $\mathbf{x} \in V(y)$ oraz $\mathbf{x}' > \mathbf{x}$ implikuje $\mathbf{x}' \in V(y)$.

(i) $V(y) = \{x_1, x_2 : ax_1 \geqslant \log y, bx_2 \geqslant \log y\}$,

(ii) $V(y) = \{x_1, x_2 : ax_1 + bx_2 \geqslant y, x_2 \geqslant 0\}$,

(iii) $V(y) = \{x_1, x_2 : ax_1 + \sqrt{x_1 x_2} + bx_2 \geqslant y, x_2 \geqslant 0\}$,

(iv) $V(y) = \{x_1, x_2 : ax_1 + bx_2 \geqslant y\}$,

(v) $V(y) = \{x_1, x_2 : x_1(1-y) \geqslant a, x_2(1-y) \geqslant b\}$,

(vi) $V(y) = \{x_1, x_2 : ax_1 - \sqrt{x_1 x_2} + bx_2 \geqslant y, x_2 \geqslant 0\}$,

(vii) $V(y) = \{x_1, x_2 : x_1 + \min\{x_1, x_2\} \geqslant 3y\}$.

Zadanie 2.5 *Kopanie robaków wymaga tylko nakładów pracy. Ilość wykopanych robaków na godzinę* (x) *dana jest funkcją* $f(L) = 100L^{\frac{1}{2}}$ $(f(L) = x)$. $(L$ *- nakład pracy na godzinę). Narysuj zależność* x *od* L. *Jaka jest przeciętna produkcyjność pracy? Pokaż, że krańcowa produkcyjność pracy* (MPL) *przy kopaniu robaków jest mniejsza od przeciętnej dla wszystkich wartości* L.

Zadanie 2.6 ([Var97]) *Jaka jest elastyczność substytucji dla funkcji CES* (*ang.* Constant Elasticity of Substitution) $f(x_1, x_2) = \{a_1 x_1^{\rho} + a_2 x_2^{\rho}\}^{\frac{1}{\rho}}$, *gdy* $a_1 \neq a_2$*?*

Zadanie 2.7 *Ilość wytworzonych narzędzi* (x) *dana jest przez funkcję produkcji* $f(K, L) = K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$ $(f(K, L) = x)$.

(i) Jaka jest przeciętna produkcyjność pracy i kapitału?

(ii) Oblicz krańcową stopę technicznej substytucji $(MRTS)$ *dla produkcji* $x = 10$, *w punktach* (K, L): $(10, 10)$, $(25, 44)$, $(4, 25)$. *Czy mamy do czynienia z malejącą* $MRTS$*?*

Zadanie 2.8 ([Var97]) *Niech* elastyczność produktu względem czynnika produkcji x_i *będzie określona przez:*

$$E_i(\mathbf{x}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i} \frac{x_i}{f(x)}.$$

Jeśli $f(\mathbf{x}) = x_1^a x_2^b$, *jaka jest elastyczność produktu względem każdego z czynników?*

Zadanie 2.9 *Rozważ funkcję produkcji* $f(K, L) = b_0 + b_1(KL)^{\frac{1}{2}} + b_2 K + b_3 L$, *gdzie* $0 \leqslant b_i \leqslant 1, i = 1, 2, 3$. *Jeżeli ta funkcja ma wyrażać stałe przychody względem skali, jakie ograniczenia należy nałożyć na* b_i*? Pokazać, że przy stałych przychodach względem skali funkcja wykazuje malejące produkcyjności krańcowe.*

Zadanie 2.10 *Zbadaj przychody względem skali funkcji produkcji* $f(K, L) = A(\frac{K}{L})^{\frac{1}{2}}$ *,* $A > 0$*. Czy produkcyjności krańcowe względem pracy i kapitału są rosnące czy malejące?*

Zadanie 2.11 ([Var97]) *Dla technologii CES,* $f(x_1, x_2) = \{x_1^\rho + x_2^\rho\}^{\frac{1}{\rho}}$*, podaj* elastyczność skali[9]*.*

Zadanie 2.12 ([Var97]) *Ponownie rozpatrz technologię CES. Pokaż, że zawsze możemy ją przedstawić jako* $f(x_1, x_2) = A(\rho)\{bx_1^\rho + (1-b)x_2^\rho\}^{\frac{1}{\rho}}$*.*

2.2 Koszty produkcji

Zadanie 2.13 *Przedsiębiorstwo Wesoła Lokomotywa wytwarzające drezyny kolejowe posiada majątek trwały o wartości* 50 *mld zł i zatrudnia* 175 *osób. Roczna wielkość produkcji wynosi* 100 *szt. Obliczyć roczny zysk księgowy netto przedsiębiorstwa jeśli wiadomo, że stawka amortyzacji* 5%*, średnia płaca miesięczna -* 2 *mln zł a jednostkowy koszt materialny* 41 *mln zł. Przedsiębiorstwo zaciągnęło kredyt* 4 *mld zł oprocentowany w skali rocznej* 10%*. Cena drezyny wynosi* 120 *mln zł, a stopa podatku dochodowego wynosi* 40%*.*

(i) Przy jakiej stopie oprocentowania kredytów zysk księgowy netto będzie zerowy?

(ii) Jaka jest minimalna wielkość produkcji zapewniająca rentowność, jeśli do kosztów stałych zaliczymy amortyzację, koszty płacowe i koszty finansowe oraz wiemy, że TVC zmieniają się proporcjonalnie do wielkości produkcji?

(iii) Jaka jest minimalna wielkość produkcji zapewniająca rentowność, jeśli dodatkowo do kosztów zmiennych dołączymy koszty płacowe?

Zadanie 2.14 *Niech w przedsiębiorstwie koszty stałe będą równe* $FC = 1000$*, a przeciętne koszty zmienne* $AVC = 3$ *(*AVC*= const.). Jeśli firma sprzedaje wyprodukowane dobro po 8 zł/szt. jaka jest minimalna, opłacalna skala produkcji?*

Zadanie 2.15 *W przedsiębiorstwie koszt stały wynosi* $FC = 300$*, a jednostkowy koszt zmienny* $AVC = 1$ *(*AVC*=const.). Firma sprzedaje swoje wyroby po cenie* $p = 8$*. Dla jakiej minimalnej wielkości produkcji zysk netto wyniesie przynajmniej* 100*, jeśli ustalono stopę podatku dochodowego na* 50%*?*

[9] *Elastyczność skali* technologii f definiujemy przez $e(\mathbf{x}) = \frac{dy(t)}{dt}\frac{t}{y(t)}$, gdzie $y(t) = f(t\mathbf{x})$. Jest to miara określająca procentowy przyrost produkcji spowodowany jednoprocentowym przyrostem wszystkich jej czynników - tj. spowodowany przyrostem *skali* działalności.

Zadanie 2.16 *Istnieją dwie technologie produkcji dobra H. Jedna pozwala wytworzyć w zakładzie do* 200 *sztuk H rocznie przy wydatkowaniu w postaci kosztów stałych* 1000 *zł i przy stałych, jednostkowych kosztach zmiennych* 2 *zł/szt. Druga, nowsza technologia wymaga* 6000 *zł kosztów stałych i $AVC = 1$ zł (AVC=const.), a maksymalna skala produkcji wynosi* 2000 *sztuk rocznie. Jeśli przewidywany popyt roczny wynosi* 1000 *szt. która z dwóch ewentualności jest bardziej opłacalna: (i) jeden zakład w nowej technologii, czy (ii)* 5 *zakładów w starej?*

Zadanie 2.17 *Funkcja produkcji dobra x ma postać $f(S, J) = S^{\frac{1}{2}} J^{\frac{1}{2}}$, gdzie S, J to odpowiednio nakłady pracy Smitha i Jonesa. Płaca za* 1 *godzinę pracy każdego z nich wynosi odpowiednio $w_S = 3$, $w_J = 12$.*

Niech $S = 900$. (i) Ile godzin musi spędzić Jones by wyprodukować 150, 300, 450 *sztuk dobra x? (ii) jaki jest krańcowy koszt wyprodukowanie* 150*-ego dobra?*

Zadanie 2.18 *Firma produkuje kije hokejowe. Funkcja produkcji przyjmuje postać $f(K, L) = 2K^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}$. Niech w krótkim okresie $K_0 = 100$, koszt jednostki kapitału wynosi $v = 1$, zaś płaca $w = 4$. (i) jaka jest krótkookresowa funkcja kosztu całkowitego i przeciętnego? (ii) jaka jest krótkookresowa funkcja kosztu krańcowego? Obliczyć koszt całkowity (TC), przeciętny całkowity (ATC), krańcowy (MC), dla produkcji* 25, 50, 100, 200 *sztuk.*

Zadanie 2.19 *Funkcja kosztu całkowitego jest opisana funkcją $TC(q) = q^3 + 2q + 2$. Podaj koszt stały (FC), zmienny (VC), przeciętny koszt zmienny (AVC), przeciętny koszt całkowity (ATC), oraz koszt krańcowy (MC).*

Zadanie 2.20 *Funkcja produkcji ma postać $f(K, L) = K^{\frac{1}{4}} L^{\frac{1}{4}}$. Wyznacz krótkookresowe funkcje kosztu przeciętnego i krańcowego (w krótkim okresie kapitał jest stały i wynosi $K_0 = 16$), jeśli wiemy, że cena jednostki kapitału $v = 10$ a cena jednostki pracy $w = 2$. Oblicz przeciętny koszt całkowity (ATC) i koszt krańcowy (MC) dla $f(K, L) = 10$.*

Zadanie 2.21 *Pokaż na przykładzie, że maksymalizacja zysku firmy jest równoważna minimalizacji jego kosztów. Dla uproszczenia przyjmij funkcję produkcji postaci $f(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$, przy koszcie jednostkowym kapitału r i pracy w (wskazówka: przypomnij sobie zadanie 1.17 oraz 2.24).*

Zadanie 2.22 ([Var97]) *Firma ma dwie hale produkcyjne, z których koszty całkowite pierwszej są opisane przez $c_1(q_1) = q_1^2/2$, a drugiej $c_2(q_2) = q_2$. Jaką postać ma funkcja kosztów firmy, jeśli firma może wykorzystywać obydwie technologie jednocześnie?*

Zadanie 2.23 ([Var97]) *Firma ma dwie hale produkcyjne, z których koszty całkowite pierwszej są opisane przez* $c_1(q_1) = 4\sqrt{q_1}$*, a drugiej* $c_2(q_2) = 2\sqrt{q_2}$*. Jaką postać ma funkcja kosztów firmy?*

Zadanie 2.24 *Dla zadanych poniżej funkcji produkcji wyprowadź odpowiadające im funkcje kosztów długookresowych.*

(i) $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ (*doskonale substytucyjne czynniki produkcji*),

(ii) $f(\mathbf{x}) = \min\{x_1, x_2\}$ (*technologia Leotiefa*),

(iii) $f(\mathbf{x}) = \{x_1^\rho + x_2^\rho\}^{\frac{1}{\rho}}$, $\rho < 1$ (*funkcja produkcji CES*),

(iv) $f(\mathbf{x}) = x_1^\alpha x_2^{1-\alpha}$ (*funkcja Cobba-Douglasa, szczególny przypadek funkcji CES*).

Zadanie 2.25 ([Var97]) *Wyprowadź funkcję kosztów dla technologii*

$$V(y) = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + \min\{x_2, x_3\} \geqslant 3y\}.$$

Zadanie 2.26 ([Var97]) *Dla poniższych funkcji kosztów sprawdź, czy są* homogeniczne stopnia pierwszego[10], monotoniczne, wklęsłe *oraz* ciągłe *względem wielkości produkcji i cen czynników produkcji. Jeśli tak, znajdź postać odpowiadającej im funkcji produkcji, a następnie sprawdź czy jest ona homogeniczna stopnia pierwszego względem czynników produkcji. Co to oznacza?*

(i) $c(\mathbf{w}, y) = y^{\frac{1}{2}}(w_1 w_2)^{\frac{3}{4}}$,

(ii) $c(\mathbf{w}, y) = y(w_1 + \sqrt{w_1 w_2} + w_2)$,

(iii) $c(\mathbf{w}, y) = y(w_1 e^{-w_1} + w_2)$,

(iv) $c(\mathbf{w}, y) = y(w_1 - \sqrt{w_1 w_2} + w_2)$,

(v) $c(\mathbf{w}, y) = (y + \frac{1}{y})\sqrt{w_1 w_2}$.

Zadanie 2.27 ([Var97]) *Niech zbiór wymaganych czynników produkcji firmy będzie określony przez* $V(y) = \{\mathbf{x} \geqslant \mathbf{0} : ax_1 + bx_2 \geqslant y^2\}$.

(i) Podaj funkcję produkcji firmy.

(ii) Wyprowadź funkcje popytu na firmy na czynniki produkcji.

[10] Funkcję nazywamy homogeniczną stopnia pierwszego jeśli dla każdego $\alpha \geqslant 0$ zachodzi $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$.

(iii) *Jaka jest funkcja kosztów firmy?*

Zadanie 2.28 ([MCWG95]) *Na rynku działa J firm. Przeciętny koszt całkowity firmy j jest opisany przez $ATC_j(q_j) = \alpha + \beta_j q_j$, gdzie $q_j \geqslant 0$ określa poziom produkcji firmy j. Zauważ, że o ile α jest taka sama dla każdej z firm, o tyle β_i może się różnić między nimi. Twoim zadaniem jest określenie zagregowanego poziomu produkcji q, który zminimalizuje koszty produkcji na rynku. Zakładamy $q < (\alpha / \max |\beta_i|)$.*

(i) *Jeśli $\forall j$, $\beta_j > 0$, jak powinna zostać rozłożona produkcja między J firm?*

(ii) *Jeśli $\forall j$, $\beta_j < 0$, jak powinna zostać rozłożona produkcja między J firm?*

(iii) *Co jeśli $\beta_j > 0$ dla niektórych j, a dla pozostałych $\beta_j < 0$?*

2.3 Zysk i decyzje rynkowe firm

Zadanie 2.29 *Oblicz poziom produkcji obrany przez firmę na rynku doskonale konkurencyjnym, której koszty całkowite są opisane przez $TC(q) = 100 + 6q + q^2$.*

(i) *Niech $p = 126$. Obliczyć utarg, zysk, przeciętny koszt całkowity (ATC) i krańcowy (MC) dla optymalnego poziomu produkcji.*

(ii) *Przy jakiej cenie zysk spadnie do zera?*

(iii) *Wyprowadź funkcję podaży firmy.*

Zadanie 2.30 *Niech funkcja kosztu całkowitego firmy na rynku doskonale konkurencyjnym przyjmie postać $TC(q) = 16 + \frac{q^2}{100}$. Wyznaczyć funkcję podaży firmy.*

Zadanie 2.31 *Wyznaczyć krótkookresową krzywą podaży firmy, $p(q)$, jeśli wiemy, że jej koszt całkowity ma postać $TC(q) = 100 + 12q + q^2$.*

Zadanie 2.32 *Funkcja produkcji dla przedsiębiorstw zajmujących się składaniem kalkulatorów jest dana przez $x = f(L) = 2L^{\frac{1}{2}}$, gdzie x określa wielkość produkcji, a L nakłady pracy. Jeśli firma działa w warunkach konkurencyjnych wyznacz funkcję podaży $x(p, w)$, gdzie p określa cenę sprzedaży, zaś w wysokość wynagrodzenia.*

Zadanie 2.33 *Firma produkująca dobro x działa na rynku konkurencyjnym, sprzedając swój produkt po zadanej cenie p. Jej technologia oparta jest tylko na pracy L i przyjmuje postać $f(L) = L^\alpha$, $\alpha > 0$. Firma jest jedynym pracodawcą w regionie i zna dokładną postać podaży pracy, którą można opisać funkcją $w = \gamma L^\beta$, $\beta > 0$. Wyprowadź funkcję podaży przedsiębiorstwa i popytu firmy na pracę w zależności od ceny p.*

Zadanie 2.34 *Przedsiębiorstwo wie, że jego utarg krańcowy wynosi $MR(q) = 100 - 5q$, a funkcja kosztu całkowitego wynosi $TC(q) = 150 + 50q$ (q określa wielkość produkcji). Oblicz maksymalny zysk firmy (załóż, że przy zerowej produkcji utarg całkowity wynosi 0).*

Zadanie 2.35 *Przedsiębiorstwo posiada pełną informację o funkcji popytu na swoje wyroby, która przyjmuje postać $p(q) = 120 - 4q$. Koszt zmienny jednostkowy ma postać $AVC(q) = q + 20$, a koszt stały wynosi $FC = 400$. Obliczyć dla jakiej wielkości produkcji przedsiębiorstwo osiąga (i) maksymalny zysk, (ii) maksymalny utarg, (iii) minimalny przeciętny koszt całkowity.*

Zadanie 2.36 *Niech popyt na dobro będzie opisany przez $D(p) = 50 - 0.5p$, a koszt całkowity firmy operującej na rynku, przez $TC(q) = 50 + 40q$, gdzie q określa poziom produkcji. Wyprowadź funkcję podaży przedsiębiorstwa. Jaka cena i jaki poziom produkcji będą ustalone w długim okresie? Jaka jest cenowa elastyczność popytu w tym punkcie?*

Zadanie 2.37 *Niech popyt na dobro x będzie opisany wzorem $p(q) = -10q + 400$, a koszty krańcowe i stałe firmy są określone odpowiednio przez $MC(q) = 5q + 100$ i $FC = 0$. Oblicz q, p, MC oraz zysk firmy w długim okresie.*

Zadanie 2.38 *Na rynku doskonale konkurencyjnym firmy wytwarzają dane dobro po kosztach całkowitych opisanych przez $TC(q) = 0.1q^2 + 10q + 40$. (i) Wyznacz funkcję podaży firmy, (ii) poziom produkcji firm i ich zyski dla $p = 20$ oraz poziom produkcji, ceny oraz zyski firm w długim okresie?*

Zadanie 2.39 ([Var97]) *Funkcja popytu na dobro x jest opisana przez $p(q) = 10 - q$, gdzie q określa sprzedanej ilości dobra. Monopolista posiada technologię umożliwiającą mu wyprodukowanie maksymalnie 4 jednostek dobra x. Jaką ilość dobra x sprzeda i po jakiej cenie? Jaka byłaby cena gdyby firma zachowywała się doskonale konkurencyjnie? Czy cokolwiek by się zmieniło gdyby monopolista mógł wyprodukować maksymalnie 6 jednostek dobra x?*

Zadanie 2.40 *W monopolu funkcja utargu krańcowego jest opisana przez $MR(q) = 100 - 4q$, zaś kosztu całkowitego za pomocą $TC(q) = 8q^2 + 20q - 24$. Jeśli w długim okresie współczynnik cenowej elastyczności popytu wynosi $\varepsilon = 3$, jaki jest zysk firmy?*

Zadanie 2.41 ([Var97]) *Załóżmy, że funkcja popytu na rynku monopolistycznym jest opisana przez funkcję $p(q,t)$, gdzie q określa ilość wyprodukowanego dobra, a t jest parametrem charakteryzującym preferencje konsumentów. Dla uproszczenia, niech koszty krańcowe monopolisty będą stałe. Wyprowadź zależność ukazującą jak poziom produkcji reaguje na zmiany parametru t. W jaki sposób upraszcza się ta zależność, jeśli popyt przyjmie szczególną postać $p(q,t) = a(q) + b(t)$ (wskazówka: skorzystaj z* twierdzenia o funkcji uwikłanej*, dla uproszczenia załóż dwukrotną różniczkowalność funkcji p i odrzuć rozwiązania brzegowe).*

Zadanie 2.42 *Przedsiębiorstwo występujące na rynku posiadają technologię, przy której koszt krańcowy wynosi $MC = 40$, a koszt stały $FC = 50$. Dla posegmentowanego rynku monopolistycznego możliwe jest określenie postaci popytu każdego z segmentów: $D_1(p_1) = 32 - 0.4p_1$, $D_2(p_2) = 18 - 0.1p_2$.*

(i) Wyznacz ceny i ilości produkowane dla każdego z segmentów rynku przez analizowaną firmę. Oblicz jej zysk.

(ii) Załóżmy, że firma nie różnicuje cen produktów na obydwu rynkach. Jak zmieni się zysk i ilość produkowanych dóbr?

Zadanie 2.43 ([CN00]) *Mafia zaopatruje miasto w alkohol z przemytu. Sprzedaje go w kasynach gry, które zgłaszają popyt w wysokości $D_k(p_k) = 240-2p_k$, oraz klubach nocnych, zgłaszających popyt na poziomie $D_n(p_n) = 40 - 0.5p_n$. Wiadomo, że bywalcy obydwu miejsc nie zmienią miejsca spędzania czasu, nawet jeśli ceny alkoholu będą się istotnie różniły. Jedyny koszt przemytu alkoholu to 20, które pod postacią łapówki mafia musi zapłacić komendantowi policji od każdej butelki.*

(i) Ile wynoszą ceny oraz łączna sprzedaż alkoholu, w przypadku gdy mafia różnicuje ceny?

(ii) Jaka będzie cena i ilość produkcji, jeśli mafia nie będzie różnicować cen?

Zadanie 2.44 ([Var97]) *Monopolista sprzedaje swoje produkty na dwóch rynkach. Popyt na jego produkty jest zadany przez $D_1(p_1) = a_1 - b_1p_1$ na rynku 1 oraz $D_2(p_2) = a_2 - b_2p_2$ na rynku 2, gdzie p_1 i p_2 to ceny dóbr odpowiednio na rynku 1 i 2. Koszty krańcowe monopolisty są zerowe. O ile monopolista może sprzedawać produkty na obydwu rynkach po różnej cenie, o tyle w ramach jednego rynku cena musi być jednakowa.*

(i) Przy jakich warunkach nałożonych na (a_1, a_2, b_1, b_2), monopolista nie będzie chciał różnicować ceny na obydwu rynkach (załóż wewnętrzność rozwiązań)?

(ii) Niech $D_i(p_i) = a_i p_i^{-b_i}$, $i = 1, 2$, a koszty krańcowe monopolisty będą równe $c > 0$. Przy jakich warunkach nałożonych na (a_1, a_2, b_1, b_2) monopolista nie będzie chciał różnicować ceny na obydwu rynkach (załóż wewnętrzność rozwiązań)?

Zadanie 2.45 ([Var97]) *Jednym z powszechnych przejawów dyskryminacji cenowej jest pobieranie od konsumentów stałej kwoty za* prawo *do zakupu dobra, a następnie pobieranie od nich opłat za każdą zakupioną jednostkę. Standardowym przykładem są parki rozrywki, gdzie wpierw płaci się za wstęp do parku, a następnie należy dopłacić za każdą atrakcję. Tego typu praktyka cenowa nosi nazwę* two part tariff. *Załóżmy, że na rynku popyt na dane dobro jest zadane funkcją $p(q)$, a koszty monopolisty za pomocą $c(q)$. Jeśli monopolista będzie stosował politykę cenową opisaną jak powyżej, to czy będzie produkował więcej niż gdyby nie prowadził takiej polityki cenowej?*

Zadanie 2.46 *Monopolista maksymalizuje $pD(p) - c(D(p))$, gdzie D jest funkcją popytu na dane dobro, p jego ceną, a c kosztami całkowitymi produkcji. Chcąc przechwycić część zysku monopolistycznego, rząd nakłada podatek w wysokości t na przychody monopolisty, w wyniku czego celem monopolisty staje się maksymalizacja*

$$(1 - t)pD(p) - c(D(p)).$$

Załóż różniczkowalność podanych funkcji i wewnętrzność rozwiązań.

(i) Podatek zwiększa, czy zmniejsza produkcję monopolisty?

(ii) Załóżmy, że rząd decyduje się przekazać uzyskany dochód konsumentom. Dzięki temu, każdy z konsumentów otrzymuje rabat od ceny każdej jednostki dobra w wysokości t na kupowane dobro. Jak teraz podatek t wpływa na poziom produkcji monopolisty?

Zadanie 2.47 ([Var97]) *Na rynku działa duża liczba firm produkujących dobro y przy kosztach całkowitych*

$$TC(w_1, w_2, q) = (q^2 + 1)w_1 + (q^2 + 2)w_2,$$

gdzie q określa poziom produkcji dobra y, a w_1, w_2 cenę czynników produkcji.

(i) Znajdź krzywą przeciętnego kosztu całkowitego firmy i przeanalizuj jej zmiany względem stosunku cen czynników produkcji ($\frac{w_1}{w_2}$).

(ii) Podaj krótkookresową krzywą podaży każdej z firm.

(iii) *Podaj długookresową krzywą podaży sektora.*

(iv) *Zapisz zbiór wymaganych czynników produkcji pojedynczej firmy.*

Zadanie 2.48 *Załóżmy, że w gałęzi działa* 100 *identycznych firm. Każda z nich ma krótkookresową krzywą kosztu całkowitego* $TC(q) = \frac{q^3}{300} - 0.2q^2 + 4q$*, gdzie* q *określa wielkość produkcji dobra* x*.*

(i) *Oblicz krótkookresową krzywą podaży jako funkcję ceny* p*.*

(ii) *Zakładając brak zależności między kosztami firm w gałęzi, wylicz krzywą podaży całego rynku.*

(iii) *Przyjmując funkcję popytu rynkowego* $Q(p) = -200p+12000$ *wyznaczyć kombinację cena-ilość zapewniającą równowagę w gałęzi.*

Zadanie 2.49 *Na rynku doskonale konkurencyjnym w długim okresie sprzedaje się* 200 *sztuk dobra* x *po cenie* $p = 9$*. Zakładając, że na rynku funkcjonują przedsiębiorstwa o jednakowej technologii* ($FC = 1000$, $AVC = 3$, *maksymalna zdolność produkcyjna wynosi* 500)*, ustalić ile przedsiębiorstw może utrzymać się na rynku* (*przyjmujemy, że produkcja rozkłada się równomiernie między firmy*)*. Co zmieni się jeśli sprzedaż wyniesie* 600 *sztuk dobra* x *po cenie* $p = 8.5$*?*

Zadanie 2.50 *Respektując założenia zadania 2.49, określić ile firm utrzyma się na rynku jeśli w długim okresie sprzedaje się* 600 *sztuk dobra* x *po cenie* $p = 8.5$*, gdy przeciętne koszty całkowite* (AVC) *wzrosły do* 4*?*

Zadanie 2.51 ([Var97]) *Farmer produkuje kukurydzę wykorzystując do tego ziemię i pracę. Koszt pracy, poniesiony aby wyprodukować* y *kwintali kukurydzy wynosi* $c(y) = y^2$*. Istnieje 100 identycznych farm, które konkurują ze sobą na zasadach doskonałej konkurencji.*

(i) *Podaj krzywą podaży indywidualnego farmera.*

(ii) *Podaj rynkową krzywą podaży.*

(iii) *Załóżmy, że krzywa popytu na kukurydzę jest opisana przez funkcję* $D(p) = 200 - 50p$*. Jaka jest cena i ilość kukurydzy produkowana w długim okresie?*

Zadanie 2.52 *Niech funkcja popytu ma postać* $p(q) = 8.5 - 0.0025q$*, gdzie* q *określa poziom podaży (popytu) dobra* x *w gałęzi. Wszystkie firmy wytwarzające dobro* x *posiadają identyczną technologię (*$FC = 1000$*,* $AVC = 3$*, maksymalna zdolność produkcyjna* $\bar{q} = 500$*). Ile przedsiębiorstw utrzyma się na rynku w długim okresie? Ile wytwarzać będzie pojedyncze przedsiębiorstwo przy równomiernym rozłożeniu produkcji? Co zmieni się jeżeli krzywa popytu przyjmie postać (i)* $p(q) = 6.5 - 0.0025q$*, (ii)* $p(q) = 7.5 - 0.0025q$*? Dla każdej z podanych krzywych popytu, proszę określić maksymalną liczbę przedsiębiorstw na rynku, jeśli* AVC *wzrośnie do* 4.5*.*

Zadanie 2.53 ([Var97]) *Na tropikalnej wyspie mieszka stu szkutników, ponumerowanych od* 1 *do* 100*. Każdy z nich może rocznie wybudować maksymalnie* 12 *łodzi i każdy dąży do maksymalizacji zysku. Niech* y_i *określa liczbę łodzi wybudowanych przez* i*-tego szkutnika. Załóżmy, że koszty produkcji łodzi* i*-tego szkutnika wynoszą* $c_i(y_i) = 11 + i \cdot y_i$*, gdzie* $i = 1, 2, \ldots, 100$*. Załóżmy, że stały koszt* 11*, jest* quasi-stały*, tj. szkutnik ponosi go tylko w przypadku, gdy obiera niezerowy poziom produkcji. Jeśli cena lodzi wynosi* 25*, ilu szkutników obierze niezerowy poziom produkcji? Ile łodzi zostanie wyprodukowanych w ciągu roku?*

Zadanie 2.54 ([Var97]) *Rynek posiada następującą strukturę. Operuje na nim* 50 *firm, zachowujących się doskonale konkurencyjnie i posiadających identyczną technologię. Koszty produkcji każdej z nich wynoszą* $c(y) = y^2/2$*. Na rynku działa również monopolista o zerowych kosztach krańcowych. Popyt rynkowy jest zadany przez*

$$D(p) = 1000 - 50p.$$

(i) Jaki jest poziom produkcji maksymalizujący zysk monopolisty?

(ii) Jaka jest cena maksymalizująca zysk monopolisty?

(iii) Jaką ilość dobra oferowałby sektor doskonale konkurencyjny po tej cenie?

Zadanie 2.55 *Pomimo, iż wydaje się być logiczne, że celem firmy jest maksymalizacja zysku, można postawić pytanie, dlaczego nie dopuszcza się innych możliwości, np.: maksymalizacji utargu przedsiębiorstwa albo liczby pracowników? Warto pamiętać, że cel firmy jest określony przez jej właścicieli, a ci jakby nie było, są również konsumentami. W poniższym zadaniu przekonasz się, że celem właścicieli firm zawsze będzie maksymalizacja zysku*[11]*.*

[11] Szersza dyskusja tego problemu została zaprezentowana m.in. w [MCWG95].

Załóżmy, że w gospodarce doskonale konkurencyjnej istnieje N firm, których właścicielami jest M konsumentów. Poprzez własność rozumiemy, iż konsument i posiada udział $\theta_{ij} \geqslant 0$ w firmie j. Oczywiście $\sum_i \theta_{ij} = 1$, a więc wszystkie udziały firmy j są w posiadaniu konsumentów. Dodatkowo dopuszczamy możliwość, że dla niektórych i, j $\theta_{ij} = 0$, czyli konsument i nie musi mieć udziałów wszystkich firm.

Każda z firm produkuje oddzielne dobro j w ilości x_j po zadanej cenie p_j. Zysk każdej z nich wynosi $p_j x_j - c_j(x_j)$, gdzie c_j określa koszty całkowite j-tej firmy. Konsument maksymalizuje swoją użyteczność z konsumpcji wszystkich dóbr, przy zadanych cenach. Jego dochód stanowi suma przychodów z zysków firm oraz stały dochód w_i, pochodzący z innego źródła.

Dla uproszczenia przyjmujemy, że użyteczność u_i konsumenta jest wklęsła i dwukrotnie różniczkowalna, a koszty każdego z przedsiębiorstw c_j wypukłe i dwukrotnie różniczkowalne. Dodatkowo zakładamy, że zysk każdej z firm musi być nieujemny. Problem konsumenta i można tym samym zapisać jako

$$
\begin{array}{ll}
\max_{\{x_j\}_{j=1}^N} & u_i(x_1, \ldots, x_N) \\
p.w. & \sum_{j=1}^N p_j x_j \leqslant w_i + \sum_{j=1}^N \theta_{ij} \left[p_j x_j - c_j(x_j) \right], \\
 & p_j x_j - c_j(x_j) \geqslant 0, \forall (j = 1, \ldots, N).
\end{array}
$$

(i) Zapisz funkcję Lagrange'a odpowiadające powyższemu problemowi.

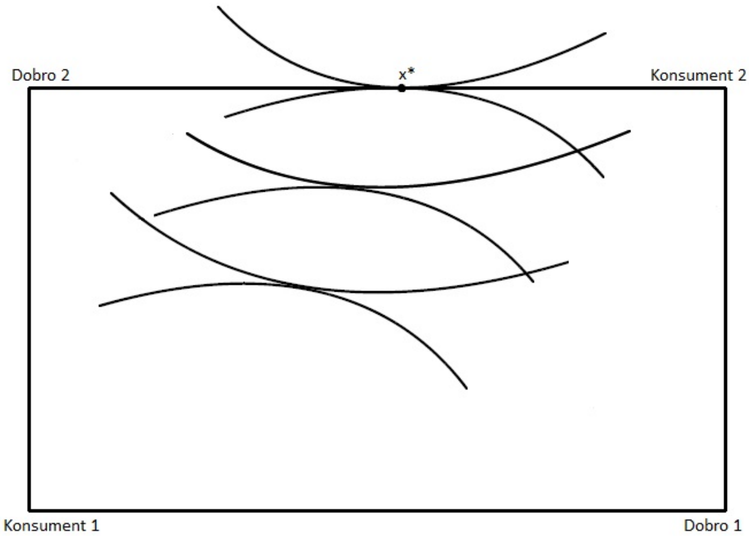
(ii) Wyprowadź warunki pierwszego rzędu na maksymalizację użyteczności konsumenta.

(iii) Na podstawie warunków pierwszego rzędu z podpunktu (ii) pokaż, że konsument maksymalizuje swoją użyteczność w punkcie, dla którego spełniony jest warunek maksymalizacji zysku każdej z firm.

3 Teoria równowaga ogólnej

Zadanie 3.1 ([Var97]) *Narysuj* skrzynkę Edgewortha *z nieskończoną liczbą cen, określających równowagi walrasowskie.*

Zadanie 3.2 ([Var97]) *Rozpatrz poniższy rysunek. Czy alokacja x^* jest Pareto-optymalna? Czy można dla tej alokacji zastosować* drugie twierdzenie dobrobytu (*tj. czy istnieją takie ceny, dla których alokacja x^* będzie osiągnięta w wyniku wymiany pomiędzy konsumentami, dla dowolnego zasobu początkowego*)*? Uzasadnij odpowiedź.*



Zadanie 3.3 ([Var97]) *Pokaż graficznie za pomocą* skrzynki Edgewortha*, że jeśli preferencje konsumentów są* lokalnie nienasycone*, to* równowaga Walras *jest Pareto-optymalna.*

Zadanie 3.4 ([CN00]) *W gospodarce żyją dwie osoby A i B, które konsumują dwa dobra, x i y. Wyposażenie początkowe osoby A wynosi $w_A = (20, 10)$, a osoby B, $w_B = (50, 20)$. Obie osoby mają identyczne funkcje użyteczności $u(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{3}{4}}$. Jeśli $p_x = 1$, ile wynosi p_y w ADCE?*

Zadanie 3.5 *Rozpatrzmy gospodarkę wymiany, w której działa dwóch konsumentów i istnieją dwa dobra. Pierwszy z nich ma zadane preferencje przez funkcję $u_1(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, zaś drugi przez $u_2(x_1, x_2) = x_1^{\beta} x_2^{1-\beta}$. Początkowy zasób każdego z nich to $\omega_i = (1, 1)$. Znajdź ceny oczyszczające rynek. Podaj alokacje obrane w równowadze Arrow-Debreu.*

Zadanie 3.6 ([**Var97**]) *Załóżmy że w gospodarce wymiany istnieje dwóch konsumentów (A i B) z identycznymi preferencjami opisanymi za pomocą funkcji* $u_A(x_1, x_2) \equiv u_B(x_1, x_2) \equiv \max\{x_1, x_2\}$. *Początkowy zasób w całej gospodarce obejmuje* 1 *jednostkę dobra* 1 *i* 2 *jednostki dobra* 2. *Narysuj* skrzynkę Edgewortha *ilustrującą silnie i słabo Pareto-optymalne alokacje.*

Zadanie 3.7 *Rozpatrzmy gospodarkę wymiany, w której występuje dwóch konsumentów i istnieją dwa dobra. Pierwszy z nich ma zadane preferencje przez funkcję* $u_1(x_1, x_2) = \alpha \log x_1 + (1 - \alpha) \log x_2$, *zaś drugi przez* $u_2(x_1, x_2) = \beta \log x_1 + (1 - \beta) \log x_2$. *Początkowy zasób pierwszego z nich to* $\omega_1 = (2, 1)$, *a drugiego* $\omega_1 = (1, 2)$. *Znajdź ceny oczyszczające rynek. Podaj alokacje obrane w równowadze Arrow-Debreu.*

Zadanie 3.8 ([**Var97**]) *Konsument A posiada preferencje opisane za pomocą* $u_A(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, *a konsument B preferencje zadane przez* $u_B(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\}$. *Początkowy zasób każdego z nich to* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

(i) Naszkicuj powyższy przykład wykorzystując skrzynkę Edgewortha.

(ii) Jaka jest równowagowa relacja cen p_1 *i* p_2*?*

(iii) Jaka alokacja jest obrana w równowadze Arrow-Debreu?

Zadanie 3.9 ([**Var97**]) *W gospodarce wymiany występuje* 15 *konsumentów i istnieją* 2 *dobra. Konsument* 3 *ma preferencje określone przez* $u_3(x_1, x_2) = \log x_1 + \log x_2$. *W jednej w Pareto-optymalnych alokacji* x^* *konsument* 3 *otrzymuje koszyk* $(10, 5)$. *Znajdź ceny, przy których alokacja* x^* *została osiągnięta?*

Zadanie 3.10 ([**Var97**]) *Rozpatrzmy gospodarkę, w której występują dwie firmy i dwóch konsumentów. Firma* 1 *jest w całkowitym posiadaniu przez konsumenta* 1. *Produkuje ona armaty z oleju, wykorzystując technologię opisaną funkcją produkcji* $a = 2x$. *Firma* 2 *jest w całkowitym posiadaniu przez konsumenta* 2 *i produkuje ona masło z oleju, przy wykorzystaniu technologii opisanej przez* $m = 3x$. *Każdy z konsumentów posiada wstępnie po* 10 *jednostek oleju. Użyteczność konsumenta* 1 *jest zadana przez* $u_1(a, m) = a^{0.4} m^{0.6}$, *zaś drugiego przez* $u_1(a, m) = 10 + 0.5 \log a + 0.5 \log m$.

(i) Określ ceny armat, masła i oleju oczyszczające rynek.

(ii) Ile masła i armat konsumuje każdy z konsumentów w ADCE?

(iii) Ile oleju zużywa każda z firm w ADCE?

Zadanie 3.11 ([CN00]) *W zamkniętej gospodarce są produkowane dwa dobra, x i y, oraz zatrudniane dwa czynniki produkcji, kapitał (K) i praca (L). Podaż obydwu czynników jest doskonale nieelastyczna, a na wszystkich rynkach panuje doskonała konkurencja, na której osiągana jest długookresowa równowaga. Funkcje produkcji obydwu dóbr opisane są w następujący sposób.*

$$x = f_x(K_x, L_x) = 48^{\frac{1}{4}} K_x^{\frac{3}{4}} L_x^{\frac{1}{4}},$$

$$y = f_y(K_y, L_y) = 3^{\frac{1}{4}} K_y^{\frac{1}{4}} L_y^{\frac{3}{4}},$$

gdzie K_i, L_i, $i = x, y$, określają odpowiednio poziomy kapitału i pracy zatrudnionych w danym sektorze. Wszyscy konsumenci w gospodarce mają jednakowe preferencje określone przez $u(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$. Łączna wartość kapitału w gospodarce wynosi $K = 324$, a liczba pracowników wynosi $L = 2500$. Cena dobra x wynosi $p_x = 100$.

(i) *Podaj cenę dobra y w równowadze Arrow-Debreu.*

(ii) *Podaj cenę po jakiej wynajmowany jest kapitał w ADCE.*

(iii) *Podaj płacę otrzymywaną przez jednego pracownika w ADCE.*

Zadanie 3.12 *W tym zadaniu rozpatrzymy problem z zadania 1.16 w warunkach równowagi ogólnej. Rozpatrz gospodarkę z jednym konsumentem i jedną firmą. Konsument posiada początkowy zasób kapitału w wysokości k_0, oraz jednostkę czasu wolnego, którą może rozdzielić pomiędzy pracę (l) i czas wolny (n) (tym samym $l + n = 1$). Konsument wynajmuje firmie swój kapitał po cenie r oraz pracę, otrzymując wynagrodzenie w. Cały swój dochód przeznacza na konsumpcję, którą nabywa po zadanej cenie p. Preferencje konsumenta są opisane za pomocą $u(c,n) = c^{\alpha} n^{1-\alpha}$.*

Firma wynajmuje od konsumenta pracę i kapitał po zadanych cenach w i r, aby zmaksymalizować zysk z produkcji dobra konsumpcyjnego, uzyskiwanego za pomocą technologii opisanej przez $f(K,L) = K^{\beta} L^{1-\beta}$. Firma sprzedaje dobro konsumpcyjne po zadanej cenie p.

(i) *Pokaż, że niezależnie od ceny r, konsument będzie wynajmował cały swój kapitał początkowy k_0.*

(ii) *Zapisz problem konsumenta i odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a, a następnie podaj warunki pierwszego rzędu na optymalny poziom c, l oraz n.*

(iii) *Zapisz problem firmy, a następnie podaj warunki pierwszego rzędu na maksymalizację jej zysku.*

(iv) Znajdź ceny r, w, p, oczyszczające rynek. Podaj alokację c, l, n, k obierane w równowadze Arrow-Debreu.

4 Wartość pieniądza w czasie

We wszystkich z poniższych zadań zakładamy zerową inflację.

Zadanie 4.1 *Pewna inwestycja trwa 2 lata, a rozkład nakładów inwestycyjnych w czasie jest następujący: 1 rok -* 31 *mln zł, 2 rok -* 1 *mln zł. Obiekt funkcjonuje przez 3 lata przynosząc zyski po* 13 *mln zł rocznie. Czy inwestycja jest opłacalna? Czy coś zmieni się jeśli nakłady inwestycyjne będą rozłożone 1 rok -* 1 *mln zł, 2 rok -* 31 *mln zł?*

Zadanie 4.2 *Rozważamy kupno modemu mając do wyboru urządzenia: PL Robotics i Pyxel. Parametry urządzeń są następujące: PL Robotics: cena: 300 zł; szybkość: 15 tys. bit/sec, Pyxel: cena 1550 zł; szybkość: 27 tys. bit/sec. Roczne zapotrzebowanie na informacje jest* 30 *mld bitów. Koszt połączenia telefonicznego wynosi* 3.6 *zł/h. Okres eksploatacji urządzenia 4 lata. Które urządzenie opłaca się kupić? Co będzie, gdy zapotrzebowanie na informacje jest* 25 *mld bitów?*

Zadanie 4.3 *Czy kupiłabyś za* 120 *zł obligację o wartości nominalnej* 200 *zł i terminie wykupu za* 3 *lata, jeśli wiesz, że jej oprocentowanie wynosi* 2.5% *rocznie, stopa lokaty bankowej* 5.0%*, a stopa ryzyka* 7.0%*?*

Zadanie 4.4 *Marynarz ze statku handlowego Jej Królewskiej Mości rozbił się na bezludnej wyspie. Jest jedynym, który przeżył. Z wraku statku udało mu się uratować w kilogramów żywności, która nie ma terminu przedawnienia ważności. Jednodniowa użyteczność marynarza jest opisana przez $\log c$, gdzie c to wielkość zjedzonego posiłku. Jeśli rozbitek wie, że za T dni przypłynie po niego statek ratunkowy, jakie będzie optymalne rozdysponowanie żywności (z uwzględnieniem dyskontowania $\beta \in (0,1)$)?*

Zadanie 4.5 *Rozpatrzmy podobny problem, jak w zadaniu 4.4, lecz tym razem marynarz nie uratował żywności, ale ziarna (w ilości w), które może zarówno zasadzić, jak i zjeść. Jeśli zasadzi s ziaren jednego dnia, to następnego otrzyma ich $f(s) = s^\alpha$. Zakładamy, że w wilgotnym klimacie tropikalnym nasiona szybko gniją, dlatego wszystkie ziarna, które nie zostały zjedzone lub zasadzone przez marynarza, niszczeją. Jednodniowa użyteczność rozbitka wynosi $\log c$, a czynnikiem dyskontującym jest $\beta \in (0,1)$.*

(i) Zapisz problem optymalizacyjny marynarza (wskazówka: przypomnij sobie zadanie 1.21) oraz odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.

(ii) Podaj optymalną ścieżkę konsumpcji marynarza.

Zadanie 4.6 *Firmy x i y operują na rynku duopolistycznym. Ponieważ posiadają tę samą technologię produkcji, dzielą się po równo zyskami na rynku. Zysk osiągany w ciągu jednego roku przez każdą z nich wynosi* \$10 *mld. Firma x zastanawia się nad kupnem firmy y, by osiągnąć pozycję monopolistyczną na omawianym rynku. Jeśli doszłoby do przejęcia, firma x osiągałaby roczny zysk w wysokości* \$17 *mld. Stopa zwrotu z długookresowych obligacji wynosi* 5%.

(i) Jeśli sytuacja obu firm jest na tyle silna, że na rynku duopolistycznym będą otrzymywać stałe zyski do końca świata, jaka jest ich rynkowa wartość?

(ii) Jaka będzie wartość firmy x jeśli dojdzie do przejęcia?

(iii) Jaka jest maksymalna cena jaką zapłaci za przejęcie firmy y zapłaci firma x? Jaka jest minimalna cena, po jakiej właściciele firmy y sprzedadzą swoją firmę? Czy dojdzie do przejęcie? Uzasadnij.

5 Wybór w warunkach ryzyka

Zadanie 5.1 ([CN00]) *Vanessa ma skrzypce* Stradivarius *warte* $400 000. *Ponieważ skrzypaczka podróżuje, instrument ma* 5% *szanse na całkowite zniszczenie. Vanessa oprócz skrzypiec ma lokatę w banku w wysokości* $22 500. *Jej funkcja użyteczności z posiadanego majątku wynosi* $u(w) = \sqrt{w}$, *gdzie* w *określa poziom posiadanego majątku. Ile Vanessa będzie skłonna zapłacić za ubezpieczenie skrzypiec?*

Zadanie 5.2 ([Var97]) *W wyniku rzutu monetą, z prawdopodobieństwem* p *otrzymujemy reszkę. Otrzymujesz propozycje zakładu, w którym możesz otrzymać* $\$2^j$ *jeśli w* j*-tym rzucie wypadnie reszka.*

(i) Jaka jest oczekiwana wygrana w tym zakładzie, jeśli przyjmiemy $p = \frac{1}{2}$.

(ii) Załóżmy, że Twoja oczekiwana użyteczność jest określona przez $u(x) = \log x$. *Wyraź użyteczność tej gry za pomocą sumy.*

(iii) Oblicz wartość tej sumy (podpowiedź: $\sum_{j=1}^{\infty} j(1-p)^{j-1} = \frac{1}{p^2}$*).*

(iv) Niech w_0 *będzie kwotą, która dostarczyłaby Ci tyle samo użyteczności. Wyznacz* w_0.

Zadanie 5.3 ([CN00]) *Michael lubi ryzyko i chce się ożenić z Betty. Ona zaproponowała mu następujący układ. Jeśli ich małżeństwo przetrwa rok, Betty dostanie od męża* $20 *mld, w przeciwnym wypadku, to ona wypłaci Michaelowi* $20 *mld z tytułu odszkodowania za straty moralne. Użyteczność Michaela ma postać* $u(w) = w^2$. *Michael ocenia, że małżeństwo ma* 60% *szans na przetrwanie jednego roku, a jego obecny majątek wynosi* $40 *mld.*

(i) Czy Michael będzie skłonny przyjąć propozycję Betty, czy będzie wolał pozostać przy swoim majątku?

(ii) Wykaż, że Michael jest ryzykantem.

Zadanie 5.4 ([Var97]) *Użyteczność konsumenta opisuje funkcja* $u(w) = \sqrt{w}$. *Początkowo jego zasób wynosi* $4. *Jest on w posiadaniu kuponu na loterię, którego wartość wyniesie* $12 *z prawdopodobieństwem* $\frac{1}{2}$ *lub* $0 *z taką samą szansą. Podaj oczekiwaną użyteczność konsumenta. Jaka jest najniższa cena* p, *po której odsprzedałby kupon?*

Zadanie 5.5 ([Var97]) *Użyteczność konsumenta opisuje funkcja* $u(w) = \log w$. *Otrzymał on propozycję rzutu monetą wiedząc, że z prawdopodobieństwem* p *wypada reszka. Jeśli konsument postawi* $\$x$, *to wygra* $w + x$, *jeśli* *wypadnie reszka, lub $w - x$, jeśli wypadnie orzeł. Znajdź optymalną wartość x, jako funkcję p i w. Dla jakiego prawdopodobieństwa konsument nie będzie skłonny do gry (tj. optymalne $x = 0$)?*

Zadanie 5.6 *Rozpatrzmy problem rolnika, którego preferencje są opisane przez $u(w) = w^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, gdzie w określa poziom jego zbiorów. Rolnik z doświadczenia zna kaprysy pogody i jest w stanie określić, że z prawdopodobieństwem p rok będzie urodzajny, a z prawdopodobieństwem $(1 - p)$ okolice nawiedzi kataklizm niszczący większość jego zbiorów. Obecnie majątek rolnika wynosi w. Jeśli nadejdzie urodzaj, zbiory rolnika będą miały wartość $w + x$. Jeśli nadejdzie kataklizm, zbiory będą warte $w - x$.*

(i) Zapisz użyteczność oczekiwaną rolnika.

(ii) Załóżmy, że rolnik może się ubezpieczyć, tj. płacąc składkę y przeniesie całe ryzyko na ubezpieczyciela. Zapisz w najprostszej postaci warunek na maksymalną składkę jaką będzie on gotowy zapłacić.

(iii) Jak wysokość składki zależy od x, p i w.

(iv) Dla jakiego p wartość składki będzie najniższa (najwyższa)?

Zadanie 5.7 ([CN00]) *Jens ma majątek wart \$40 000. Prawdopodobieństwo kradzieży wszystkiego co posiada wynosi 1%. Użyteczność Jensa z majątku jest opisana przez $u(w) = \sqrt{w}$, gdzie w określa jego majątek. Ile Jens zapłaci za sprawiedliwe aktuarialnie ubezpieczenie?*

Zadanie 5.8 ([Var97]) *Konsument ma użyteczność o postaci $u(w) = -1/w$. Otrzymał on możliwość zagrania w loterię, w wyniku której otrzyma w_1 z prawdopodobieństwem p lub w_2 z prawdopodobieństwem $(1 - p)$. Jaki powinien być początkowy majątek, by było mu bez różnicy czy zagra w loterię, czy nie?*

Zadanie 5.9 ([Var97]) *Rozpatrz problem konsumenta, który pragnie zmaksymalizować swój dochód w kolejnym okresie. Wiadomo, że w następnym okresie wystąpi jeden ze stanów $s = 1, \ldots, S$, z prawdopodobieństwem p_s. Konsument ma za zadanie obrać swój portfel inwestycyjny $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_S)$, gdzie a_s określa ilość akcji danego aktywa. Jeśli w następnym okresie wystąpi stan s, wówczas konsument otrzymuje dochód a_s. Cena każdego aktywa wynosi v_s, a posiadany majątek konsumenta to w. Konsument może przenieść swój majątek na okres następny tylko za pomocą aktywów. Jego celem jest zmaksymalizować zdyskontowaną wartość oczekiwaną swojej przyszłej wypłaty. Niech $\beta = \frac{1}{1+r}$ będzie czynnikiem dyskontującym.*

(i) *Znajdź optymalne* **a** *dla zadanych prawdopodobieństw stanów* p_s *i cen* v_s.

(ii) *Jak zmieni się portfel konsumenta, gdy będzie on dążył do maksymalizacji oczekiwanej, przyszłej użyteczności z majątku, opisanej przez* $u(w) = \log w$*?*

Zadanie 5.10 ([MCWG95]) *Rozpatrzmy gospodarkę wymiany w warunkach niepewności. W gospodarce występuje dwóch konsumentów, dwa stany natury i jedno dobro konsumpcyjne. Przed rozwiązaniem niepewności, konsumenci określają kontrakty na ceny i ilości dóbr, w zależności od stanu natury, które zostaną zrealizowane, gdy nadejdzie jeden z dwóch stanów natury. Użyteczność pierwszego konsumenta ma postać* $u_1(x) = x$*, a drugiego* $u_1(x) = \log x$*. Przez* $x_{s,i}$*,* $s = 1, 2$*,* $i = 1, 2$*, oznaczymy ilość dobra* x *konsumowanego w stanie* s *przez konsumenta* i*, natomiast przez* $\pi_{s,i}$*, subiektywne prawdopodobieństwo konsument* i *wystąpienia stanu* s*. Niech* w_s *będzie zasobem początkowym, który w stanie* s *otrzyma każdy z konsumentów.*

(i) *Czy preferencje konsumentów wykazują awersję do ryzyka? Uzasadnij.*

(ii) *Załóżmy, że konsumenci mają takie same subiektywne prawdopodobieństwa wystąpienia każdego ze stanów. Pokaż, że w wewnętrznej ADCE konsument* 2 *ubezpiecza się w całości (tj. niezależnie od stanu konsumuje tyle samo).*

(iii) *Załóżmy tym razem, że konsumenci mają inne subiektywne prawdopodobieństwa wystąpienia każdego ze stanów. Pokaż, że tym razem w wewnętrznej ADCE konsument* 2 *nie ubezpiecza się w całości. Jak jest to uzależnione od różnicy subiektywnych prawdopodobieństw? Pokaż, że gracz* 1 *nie zyskuje na wymianie.*

Zadanie 5.11 *W gospodarce istnieją dwa aktywa ryzykowne i jedno pewne. Zwrot z pierwszego (odpowiednio drugiego) ryzykownego aktywa wynosi* R_1 *(odpowiednio* R_2*) z prawdopodobieństwem* α_1 *(*α_2*) lub* 0 *w przeciwnym wypadku. Zwrot z pewnego aktywa wynosi* R_0*. Konsument posiada początkowo majątek* w*, który przeznacza w całości na powyższe aktywa tak, aby zmaksymalizować swoją użyteczność* $u(w) = \log w$*. Przez* θ_i*,* $i = 1, 2, 3$*, oznaczmy udział* i*-tego aktywa w portfelu konsumenta. Znajdź optymalny portfel konsumenta.*

Zadanie 5.12 *W gospodarce istnieje* m *aktywów ryzykownych i jedno pewne. Zwrot z aktywa ryzykownego* i *jest zmienną losową* R_i *o rozkładzie normalnym* $N(\mu_i, \sigma_i^2)$*,* $i = 1, \ldots, m$*. Rozkłady wszystkich aktywów są od siebie niezależne.*

Zwrot z aktywa pewnego wynosi R_0. Konsument posiada początkowy majątek w wysokości w, który przeznacza w całości na powyższe aktywa tak, aby zmaksymalizować swoją użyteczność $u(w) = w - bw^2$. Przez θ_i, $i = 1, \ldots, m$, oznaczmy udział i-tego aktywa w portfelu konsumenta.

(i) Jaka jest ogólna postać wartości oczekiwanej użyteczności u?

(ii) Znajdź optymalny portfel konsumenta.

6 Teoria gier

Zadanie 6.1 (Porównywanie monet (*matching pennies*)) *Gra wygląda następująco. Każdy z dwóch graczy układa niezależnie na stole monetę, odwracając ją jedną ze stron do góry (orłem - O lub reszką - R). Następnie gracze jednocześnie odsłaniają swoje monety. Macierz wypłat zamieszczono poniżej.*

	R	*O*
R	*1,-1*	*-1,1*
O	*-1,1*	*1,-1*

Znajdź równowagi Nasha gry w strategiach czystych i mieszanych.

Zadanie 6.2 *Zapisz grę z zadania 6.1 w postaci ekstensywnej.*

Zadanie 6.3 ([Var97]) *W poniższej grze znajdź równowagi w strategiach zdominowanych.*

	L	*S*	*P*
G	*3,3*	*0,3*	*0,0*
S	*3,0*	*2,2*	*0,2*
D	*0,0*	*2,0*	*1,1*

Najstępnie znajdź wszystkie równowagi Nasha gry w strategiach czystych. Co możesz powiedzieć o równowagach w strategiach zdominowanych i równowagach Nasha?

Zadanie 6.4 ([FT02]) *Udowodnij, że jeśli po iteracyjnym eliminowaniu strategii zdominowanych pozostaje dokładnie jeden profil strategii, to musi on być równowagą Nasha.*

Zadanie 6.5 ([MCWG95]) *Udowodnij, że (i) jeśli gracz ma dwie słabo dominujące strategie, to dla każdej strategii obranej przez drugiego gracza, muszą one dawać taką samą wypłatę. (ii) Podaj przykład gry dwuosobowej, w której gracz pierwszy ma dwie słabo dominujące strategie, ale gracz preferowałby, żeby gracz pierwszy obierał tylko jedną z nich.*

Zadanie 6.6 ([Var97]) *Rozpatrz poniższą grę.*

	L	*P*
G	*a,b*	*c,d*
D	*e,f*	*g,h*

(i) *Jeśli* (G, L) *jest równowagą w strategiach dominujących, jakie warunki muszą spełniać a, ..., h?*

(ii) *Jeśli* (G, L) *jest równowagą Nasha, które z warunków zapisanych z punkcie (i) muszą być spełnione?*

(iii) *Jeśli* (G, L) *jest równowagą w strategiach dominujących, to czy musi ona być równowagą Nasha?*

Zadanie 6.7 (Gra w cykora (*play chicken*)) *Dwóch kierowców w rozpędzonych samochodach jedzie w swoim kierunku wąską drogą, na czołowe zderzenie. Każdy z nich ma trzy strategie: jechać prosto* (JP)*, w ostatniej chwili skręcić w lewo* (SL) *lub w ostatniej chwili skręcić w prawo* (SP)*. Jeśli jeden z kierowców skręci w lewo albo w prawo, podczas gdy drugi pojedzie prosto, to wygrywa ten który pojechał prosto (drugi jest cykorem). Jeśli obaj pojadą prosto, giną tragicznie w wypadku, podobnie jak w sytuacji, gdy jeden i drugi postanowią w ostatniej chwili skręcić w przeciwnych kierunkach (wtedy także dochodzi do zderzenia czołowego, np.:* (SL, SP) *lub* (SP, SL)*). Jeśli się miną, nikt nie wygrywa. Wypłaty zapisano w macierzy poniżej.*

	SL	*JP*	*SP*
SL	*0,0*	*-10,10*	*-100,-100*
JP	*10,-10*	*-100,-100*	*10,-10*
SP	*-100,-100*	*-10,10*	*0,0*

(i) *Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych.*

(ii) *Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach mieszanych.*

(iii) *Jeśli gracze grają strategie mieszane, jaka jest szansa, że w równowadze Nasha żaden z kierowców nie zginie?*

Zadanie 6.8 *Zapisz grę z zadania 6.7 w postaci ekstensywnej.*

Zadanie 6.9 ([MCWG95]) *Rozpatrz proces negocjacji, podczas którego dwie jednostki podejmują decyzje w sprawie inwestycji, która przyniesie im* \$100 *zysku, ale muszą określić jak zostanie on podzielony. Negocjacje wyglądają następująco. Każdy z graczy jednocześnie zgłasza swoje żądanie co do wysokości zysku. Jeśli suma ich żądań jest większa niż* \$100*, nie dochodzą do porozumienia i zrywają negocjacje nie otrzymując nic w zamian. Jeśli suma ich żądań jest mniejsza niż* \$100*, każdy dostaje tyle ile żądał, a reszta zostaje przeznaczona na cele charytatywne.*

(i) Podaj silnie zdominowane strategie każdego z graczy.

(ii) Podaj słabo zdominowane strategie każdego z graczy.

(ii) Jakie są równowagi Nasha w strategiach czystych podanej gry? Czy istnieją równowagi Pareto-optymalne?

Zadanie 6.10 (Model Hottelinga (1929)) *W miasteczku wybudowanym wzdłuż prostej drogi, mieszkańcy zamieszkują na jej 1 milowym odcinku (miasto jest jednostajnie zagęszczone przez nieskończoną masę mieszkańców na tym odcinku). Ceny lodów w mieście są jednakowe w każdej lodziarni, dlatego każdy z konsumentów zawsze chodzi do tej, która jest najbliżej jego domu (zakładamy, że cena lodów jest na takim poziomie, iż konsument jest gotowy przejść nawet całą milę, żeby je kupić). Jeśli dwie lodziarnie stoją w jednym miejscu, dzielą się sprzedażą po połowie.*

(i) Rozpatrz przypadek, w którym dwie lodziarnie podejmują jednocześnie decyzję o swojej lokalizacji. Pokaż, że istnieje dokładnie jedna równowaga Nasha w strategiach czystych, w której obydwie lodziarnie obierają lokalizację dokładnie w środku miasta.

(ii) Pokaż, że jeśli rozpatrzymy taką samą grę z trzema graczami, to nie istnieje równowaga Nasha gry w strategiach czystych.

Zadanie 6.11 ([Var97]) *Rozpatrz następującą grę.*

	L	*S*	*P*
G	*1,0*	*1,2*	*2,-1*
S	*1,1*	*1,0*	*0,-1*
D	*-3,-3*	*-3,-3*	*-3,-3*

(i) Wskaż strategie obu graczy, które są silnie zdominowane.

(ii) *Wskaż strategie obu graczy, które są słabo zdominowane.*

(iii) *Spróbuj znaleźć równowagi w strategiach dominujących, a następnie wszystkie równowagi Nasha. Co możesz powiedzieć o tych dwóch typach równowag? Która jest pojęciem słabszym, a która mocniejszym?*

Zadanie 6.12 ([MCWG95]) *Rozpatrz następującą grę.*

	LL	*L*	*M*	*R*
U	*100,2*	*-100,1*	*0,0*	*-100,-100*
D	*-100,-100*	*100,-49*	*1,0*	*100,2*

(i) *Jako gracz 2 (wybierając strategie LL, L, M, R), bez możliwości komunikacji z graczem 1 przed grą, którą strategię byś obrał?*

(ii) *Jakie są równowagi Nasha (w strategiach czystych i mieszanych) w powyższej grze?*

(iii) *Czy strategia obrana w podpunkcie (i) należy do strategii obieranych w jednej z równowag? Czy Twoja strategia należy do* strategii zracjonalizowanych[12].

(iv) *Jeśli by umożliwiono komunikację między graczami przed rozpoczęciem gry, obrałbyś inną strategię niż w podpunkcie (i)?*

Zadanie 6.13 ([Var97]) *Rozpatrz poniższą grę.*

	L	*P*
G	*2,2*	*-1,-1*
D	*-1,-1*	*1,1*

(i) *Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych.*

(ii) *Czy występują w tej grze równowagi Pareto-lepsze od innych?*

(iii) *Załóżmy, że gracz pierwszy (wybierający strategie G,D) wykonuje ruch jako pierwszy i zobowiązuje się do swojej strategii. Czy policzone równowagi w punkcie (i) dalej są równowagami Nasha?*

[12] *Strategiami zracjonalizowanymi* nazywamy strategie, które otrzymano w wyniku iteracyjnej eliminacji strategii, które nigdy nie są najlepszą odpowiedzią.

(iv) *Zapisz grę w postaci ekstensywnej i znajdź wszystkie równowagi Nasha doskonałe ze względu na podgry gry z punktu (iii).*

Zadanie 6.14 ([MCWG95]) *Rozpatrz następującą sytuację. Dwie wrogie sobie armie decydują się zająć wyspę. Generałowie każdej z nich decydują jednocześnie o tym czy* zaatakować (A)*, czy* nie zaatakować (NA)*. Dodatkowo, każda z armii jest* silna (s) *albo* słaba (w) *z równym prawdopodobieństwem (każda z armii losuje swój typ niezależnie od przeciwnika), a jej typ jest znany tylko jej generałowi. Wypłaty są następujące. Wyspa jest warta M jeśli zostanie zdobyta. Armia może zdobyć wyspę, jeśli sama zaatakuje, podczas gdy druga armia nie atakuje, bądź gdy jest silna i atakuje, a druga jest słaba i atakuje. Jeśli obydwie armie są tego samego typu i obydwie atakują, żadna z nich nie zdobywa wyspy. Każda armia ponosi koszt walki, który wynosi c_s, jeśli jest silna lub c_w jeśli jest słaba ($c_s < c_w$).*

(i) *Zapisz grę w postaci strategicznej.*

(ii) *Zapisz grę w postaci ekstensywnej.*

(iii) *Jeśli każdy z generałów będzie kierował się maksymalizacją oczekiwanej wypłaty, jakie będą równowagi Nasha gry w strategiach czystych (wskazówka: rozpatrz oddzielnie przypadki, gdy analizowana armia jest silna albo słaba)?*

Zadanie 6.15 *Rozpatrzmy zmodyfikowana grę do tej w zadaniu 6.14. Tym razem jedna z armii zdobyła wyspę wcześniej, a generał drugiej zastanawia się czy ją odbić (zaatakować - A), czy też nie (nie atakować - NA). General armii pierwszej podejmuje decyzję jako pierwszy. Może zadecydować o odwrocie z wyspy (nie atakuje - NA), lub o bronieniu jej do ostatniego żołnierza (atakuje - A). Generał armii pierwszej zobowiązuje się do obranej strategii (jeśli dokona odwrotu, nie zdąży powrócić na pole bitwy, aby bronić wyspy, a jeśli zadecyduje o obronie, będzie kazał spalić wszystkie mosty, które umożliwiłyby ucieczkę jego żołnierzom). Wypłaty i koszty walki pozostają jak w zadaniu 6.14.*

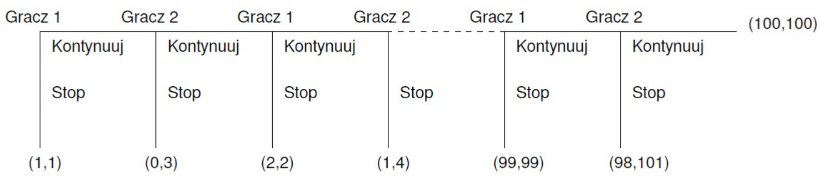
(i) *Zapisz grę w postaci strategicznej.*

(ii) *Zapisz grę w postaci ekstensywnej.*

(iii) *Jeśli każdy z generałów będzie kierował się maksymalizacją oczekiwanej wypłaty, jakie będą równowagi Nasha doskonałe ze względu nad podgry w strategiach czystych?*

(iv) Porównaj wyniki z zadaniem 6.14. Jak zobowiązania armii pierwszej wpływają na równowagi gry? Dlaczego palenie za sobą mostów wydaje się być dobrym posunięciem?

Zadanie 6.16 (Gra w stonogę (*centipede game*)) *W skończonej grze z pełną informacją dwóch graczy rozpoczyna grę mając przed sobą* \$1. *Następnie na przemian decydują, czy chcą kontynuować grę* (c), *czy ją zakończyć* (s). *Jeśli gracz zdecyduje się kontynuować grę* (c), *sędzia zabiera mu* \$1 *i dokłada* \$2 *przeciwnikowi. Jeśli gracz zakończy grę (powie* stop *-* s), *gracze otrzymują wypłaty, które zgromadziły się dotychczas na ich kontach. Jeśli żaden z graczy nie powie* stop, *gra kończy się gdy będą mieli po* \$100 *każdy.*



Znajdź równowagę Nasha doskonałą ze względu na podgry. Czy istnieją profile strategii dające Pareto-lepsze wypłaty?

Zadanie 6.17 ([MCWG95]) *Na rynku występują dwie nisze, mała* (M) *i duża* (D). *Dwie firmy decydują jednocześnie czy chcą wejść na rynek. Jeśli firma nie wchodzi na rynek* (NW), *otrzymuje wypłatę* 0. *Jeśli firma wejdzie na rynek* (W), *a druga nie, pierwsza firma przejmuje wszystkich klientów i otrzymuje zysk równy* 2.

Jeśli obie firmy wejdą na rynek, jednocześnie podejmują decyzję o niszy, na której chcą operować. Obie firmy ponoszą straty jeśli wybiorą tę samą niszę, przy czym straty są większe jeśli wspólnie wybiorą małą niszę (M) *(załóżmy, że każda firma odnosi stratę* -6 *jeśli obie wybiorą* M *oraz* -3 *jeśli wybiorą* D). *Jeśli jedna firma wybierze dużą niszę* (D), *a druga małą* (M), *to firma operująca na dużym rynku odnosi zysk, a druga stratę, przy czym strata ta jest mniejsza niż w przypadku, gdyby obie firmy obrały tę samą niszę (firma operująca na dużym rynku otrzymuje zysk równy* 1, *a druga stratę równą* -1).

(i) Zapisz grę w postaci ekstensywnej.

(ii) Zapisz grę w postaci strategicznej.

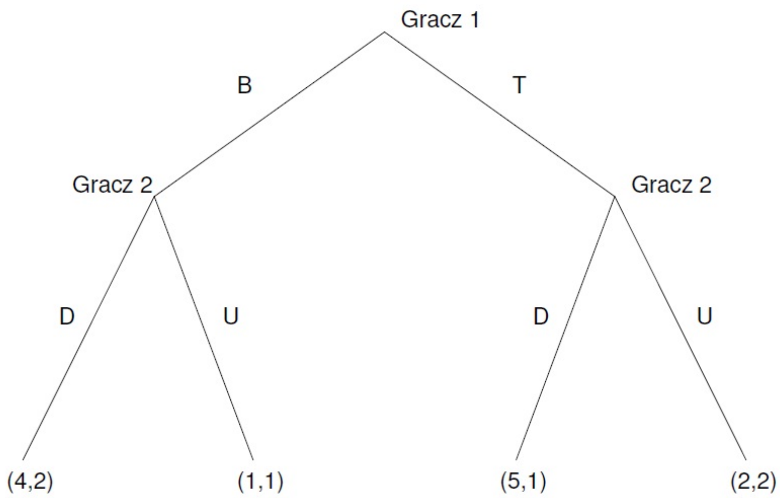
(iii) Znajdź wszystkie równowagi Nasha doskonałe ze względu na podgry w strategiach czystych.

Zadanie 6.18 (**[MCWG95]**) *W poniższa gra, w której decyzje są podejmowane jednocześnie, jest grana dwa razy.*

	b_1	b_2	b_3
a_1	*10,10*	*2,12*	*0,13*
a_2	*-12,2*	*5,5*	*0,0*
a_3	*13,0*	*0,0*	*1,1*

Gracze obserwują strategie przeciwnika i wypłaty pierwszej gry, zanim przystąpią do drugiej rozgrywki. Podaj równowagi Nasha doskonałe ze względu na podgry tej gry.

Zadanie 6.19 (**[MCWG95]**) *Rozpatrz następującą grę.*



(i) Znajdź równowagi Nasha doskonałe ze względu na podgry. Czy jest jedyna? Czy występują inne równowagi Nasha (w strategiach czystych lub mieszanych)?

(ii) Załóżmy, że gracz 2 nie obserwuje ruchów gracza 1. Zapisz nową postać ekstensywną tej gry. Jakie są równowagi Nasha w zmodyfikowanej wersji gry (w strategiach czystych i mieszanych)?

(iii) *Załóżmy, że gracz 2 obserwuje prawdziwy ruch gracza 1 z prawdopodobieństwem $p \in (0,1)$, a nieprawdziwy z prawdopodobieństwem $1-p$ (np.: jeśli gracz 1 gra T, to gracz 2 obserwuje T z prawdopodobieństwem p oraz B z prawdopodobieństwem $1-p$). Załóżmy, że każdy z graczy zna wartość p. Zapisz ponownie ekstensywną formę gry. Zakładając, że graczom zależy na maksymalizacji oczekiwanej wypłaty, wskaż wszystkie równowagi Nasha doskonałe ze względu na podgry.*

Zadanie 6.20 ([MCWG95]) *Rozpatrz dwuosobową grę w następującej formie.*

	b_1	b_1
a_1	u,v	l,m
a_2	w,x	y,z

Pokaż, ze zawsze istnieje równowaga Nasha w strategiach czystych (wskazówka: zdefiniuj strategię gracza 1 jako prawdopodobieństwo wybrania strategii a_1, a strategię gracza 2 jako prawdopodobieństwo obrania strategii b_1; następnie przeanalizuj odwzorowania najlepszej odpowiedzi obydwu graczy).

7 Oligopol

Zadanie 7.1 *W duopolu funkcja popytu rynkowego względem ceny ma postać $D(p) = A - p$, $A > 0$. Obie firmy mają stałe, choć różne, koszty krańcowe produkcji, odpowiednio c_x i c_y. Wylicz produkcję każdej firmy i całego rynku, cenę oraz zysk firm jeśli: (i) obie zachowują się zgodnie z modelem Cournota, (ii) jedna odgrywa rolę lidera, druga - zachowuje się zgodnie z modelem Cournota, (iii) pojawia się zmowa. Co by było gdyby rynek miał charakter doskonale konkurencyjny? Jak zmieniają się zyski firm pod wpływem zmiany własnych kosztów i kosztów rywala?*

Zadanie 7.2 ([CN00]) *Na rynku oligopolistycznym działa dziesięć firm, operujących przy zerowych kosztach zmiennych. Popyt na dobro jest opisany funkcją $D(p) = 600 - 0.25p$. Oblicz wielkość produkcji reprezentatywnej firmy w równowadze Cournot.*

Zadanie 7.3 *Krzywą reakcji firmy 1 opisuje funkcja $q_1^*(q_2) = 80 - 0.5q_2$, a firmy 2 $q_2^*(q_1) = 80 - 0.5q_1$. Obie firmy operują przy stałych kosztach zmiennych. O ile wyższa będzie cena ustalona w równowadze na rynku oligopolistycznym, od ceny ustalanej na rynku doskonale konkurencyjnym?*

Zadanie 7.4 ([Var97]) *Załóżmy, że na rynku występują dwie firmy ze stałymi kosztami krańcowymi, oznaczonymi odpowiednio przez c_1 i c_2. Niech $c_1 < c_2$. Rynek jest gotów zakupić $Q > 0$ jednostek dobra od producenta oferującego niższą cenę. Firmy są w stanie zaspokoić całe zapotrzebowanie rynku.*

(i) Zapisz postać indywidualnej funkcji popytu każdej z firm (zależnej od ceny firmy i jej konkurenta).

(ii) Znajdź równowagę Nasha w strategiach czystych tej gry, jeśli firmy produkujące homogeniczny produkt konkurują ze sobą cenowo (przestrzeń strategii graczy to zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, $\mathbb{R}_+$).

(iii) Jak kształtowałyby się ceny i ilości dóbr na rynku, gdyby firmy zachowywałyby się doskonale konkurencyjnie?

Zadanie 7.5 ([Var97]) *Niech popyt na rynku dobra x będzie liniowy, a koszty krańcowe dwóch operujących na nich firm jednakowe i stale równe c. Pokaż, że w konkurencji Cournot ceny są zawsze wyższe, a ilości dóbr mniejsze, niż w przypadku konkurencji Bertranda.*

Zadanie 7.6 *Niech koszty krańcowe dwóch firm operujących na rynku będą określone przez c_1 i c_2. Niech $c_1 < c_2$. Pokaż, że w przypadku zawiązania kartelu $q_1 > q_2$. Dla uproszczenia przyjmij założenie o liniowości popytu.*

Zadanie 7.7 ([Var97]) *Rozpatrz rynek, na którym operują dwie firmy z zerowymi kosztami krańcowymi. Popyt jest zadany za pomocą funkcji $p(Q) = 100 - Q$, gdzie $Q = q_1 + q_2$, q_1, q_2 są poziomami produkcji odpowiednio pierwszej i drugiej firmy.*

(i) Znajdź równowagę doskonale konkurencyjna na tym rynku. Ile wynosi wówczas łączna podaż Q?

(ii) Jeśli firmy konkurują ze sobą pod względem ilości produkcji, jaki będzie poziom Q w równowadze? Jaka będzie cena?

(iii) Jeśli firma 1 będzie zachowywać się jako lider, a 2 jako naśladowca, jaka będzie ilość dobra produkowana w równowadze Stackelberga? Na jakim poziomie zostanie ustalona cena?

Zadanie 7.8 ([CN00]) *Rynek oligopolistyczny tworzy 11 firm sprzedających homogeniczny produkt. Jedna z nich zdominowała rynek i przyjęła pozycję przywódcy* ***cenowego****. Funkcja kosztów firmy dominującej przyjmuje postać $TC_1(q_1) = 3q_1^2$. Koszty pozostałych 10 są opisane za pomocą $TC_i(q_i) = 10q_i^2$, $i = 2, \ldots, 11$. Popyt rynkowy jest następujący: $D(p) = 600 - 3p$. Oblicz poziom produkcji każdej z firm oraz cenę ustaloną w równowadze na rynku.*

Zadanie 7.9 *W poniższym zadaniu rozpatrzysz model Bertranda ze zróżnicowanym produktem. Załóżmy występowanie na rynku dwóch firm, z których każda produkuje trochę inny produkt. Popyt na dobro firmy $i = 1, 2$ będzie określony przez $D_i(p_1, p_2) = \alpha_i - \beta_i(p_i - p_{-i})$. Koszty krańcowe są stałe i wynoszą odpowiednio c_1 i c_2. Jeśli firmy konkurują ze sobą cenowo, jaki będzie poziom produkcji i ceny w równowadze? Czy firmy będą skłonne do określania ceny na poziomie kosztu krańcowego? Uzasadnij i zinterpretuj ekonomicznie.*

Zadanie 7.10 ([CN00]) *Dwie firmy na rynku oligopolistycznym wytwarzają zróżnicowany produkt. Doszły one do porozumienia, że najlepiej dla nich będzie zawiązać kartel i wspólnie maksymalizować zysk całego rynku. Koszty całkowite obydwu firm opisane są odpowiednio przez $TC_1(q_1) = 1.5q_1^2$ oraz $TC_2(q_2) = 3q_2^2 + 8$. Popyt na produkt każdego z nich jest opisany przez $p_1(q_1, q_2) = 8 - 5q_1 - q_2$ oraz $p_2(q_1, q_2) = 7 - q_1 - 2q_2$. Oblicz wielkość produkcji każdej z firm, oraz ceny przez nie ustalane.*

8 Niedoskonałości rynku

8.1 Dobra publiczne

Zadanie 8.1 **([CN00])** *W miasteczku żyje* 3000 *osób, które konsumują dobro prywatne x i dobro publiczne G. Za jednostkę dobra prywatnego należy zapłacić $p_x = 4$, a publicznego $p_G = 10$. Wszyscy mają taką samą funkcję użyteczności, opisaną funkcją $u(x, G) = x + G^{\frac{1}{3}}$. Ile powinna wynosić produkcja dobra publicznego w alokacji Pereto-optymalnej? Jaki jest poziom dobra publicznego w równowadze Nasha?*

Zadanie 8.2 **([Var97])** *Rozpatrzmy gospodarkę składającą się z dwóch konsumentów, którzy czerpią użyteczność z konsumpcji dobra prywatnego $(x_i, i = 1, 2)$ oraz publicznego (G). Każdy z nich ma jednakowe preferencje $u(x_i, G) = G^{\alpha} x_i^{1-\alpha}$, $i = 1, 2$, ale różne zasoby początkowe (odpowiednio w_1 i w_2). Wartość dobra publicznego G jest proporcjonalna do składek konsumentów ($G = g_1 + g_2$, gdzie g_i określa składkę i-tego konsumenta).*

(i) *Znajdź równowagę Nasha w strategiach czystych w podanej grze.*

(ii) *Znajdź optymalną alokację, maksymalizujące sumę użyteczności obydwu graczy.*

(iii) *Pokaż wielkość* efektu gapowicza *u każdego z graczy.*

(iv) *Jak duża musi być różnica pomiędzy dochodami obydwu graczy, aby w równowadze $g_2 = 0$, tj. całe dobro publiczne było finansowane przez pierwszego gracza?*

Zadanie 8.3 **([CN00])** *W gospodarce jest produkowane jedno dobro publiczne (G) i jedno dobro prywatne (x). Krzywą możliwości produkcyjnych można zapisać za pomocą $Y = \{(x, G) : x^2 + 100G = 5000\}$. W gospodarce żyje* 100 *osób, o jednakowych preferencjach opisanych przez $u_i(x_i, G) = x_i^{1/2} G^{1/2}$, $i = 1, \ldots, 100$, gdzie x_i konsumpcję dobra prywatnego i-tej osoby (przyjmij $x_i = \frac{x}{100}$).*

(i) *Ile wynosi optymalny poziom produkcji każdego z dóbr?*

(ii) *Jaki jest poziom użyteczności jednostki w alokacji Pareto-optymalnej?*

Zadanie 8.4 *Rozpatrz następującą grę jako rozwiązanie problemu finansowania dyskretnego dobra publicznego. Każdy z dwóch podmiotów określa swój udział b_i, $i = 1, 2$, w finansowaniu dobra publicznego. Jeśli $b_1 + b_2 \geqslant c$, dobro* *publiczne zostaje sfinansowane, a każdy z agentów musi zapłacić określoną wcześniej kwotę. W przeciwnym wypadku, żaden z nich nic nie płaci. Jeśli w_i określa początkowy majątek każdego z podmiotów, to ich użyteczność możemy zapisać jako*

$$u_i(w_i, b_i, c_i) = \begin{cases} w_i - b_i + c & gdy \quad b_1 + b_2 \geqslant c, \\ w_i & w.p.p. \end{cases}$$

(i) *Pokaż, że w równowadze $b_1 + b_2 = c$ albo $b_1 = b_2 = 0$. Czy w tej grze występują słabo zdominowane strategie?*

(ii) *Określ wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych tej gry.*

(iii) *Określ rozwiązania Pareto-optymalne tej gry. Czy należą one do zbioru równowag?*

(iv) *Czy istnieją równowagi, w których dobro nie jest finansowane?*

Zadanie 8.5 *Rozpatrz grę jak w zadaniu 8.4, lecz tym razem funkcja użyteczności podmiotów ma postać*

$$u_i(w_i, b_i, c_i) = \begin{cases} \log(w_i - b_i + c) & gdy \quad b_1 + b_2 \geqslant c, \\ \log w_i & w.p.p. \end{cases}$$

(i) *Określ wszystkie równowagi Nasha tej gry.*

(ii) *Określ rozwiązania Pareto-optymalne tej gry. Czy należą one do zbioru równowag?*

(iii) *Porównaj wyniki z tymi uzyskanymi w zadaniu 8.4. Ile tym razem istnieje optymalnych rozwiązań? Jeśli $w_1 < w_2$, który z graczy będzie musiał zapłacić wyższą składkę?*

(iv) *Czy istnieją równowagi, w których dobro nie jest finansowane?*

Zadanie 8.6 ([Var97]) *Pewne nieodkryte plemię* Grads *zamieszkujące serce amazońskiej puszczy, charakteryzuje się tym, że jego członkowie konsumują wyłącznie orzechy kokosowe. Kokosy służą im do dwóch celów. Mogą je jeść, albo poświęcać w ofierze bogom, podczas rytualnych obrzędów.*

Załóżmy, że każdy i-ty, $i = 1, \ldots, n$, członek plemienia Grad ma początkowy zasób kokosów równy $w_i > 0$. Niech $x_i \geqslant 0$ określa ilość kokosów konsumowanych, a $g_i \geqslant 0$ ilość kokosów poświęcanych w ofierze przez i-tego członka *plemienia. Całkowita ilość kokosów przeznaczanych na ofiarę wynosi tym samym $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Użyteczność każdego z Gradów jest opisana za pomocą*

$$u_i(x_i, G) = x_i + a_i \log G,$$

gdzie $a_i > 0$. Niech $G_{-i} = \sum_{j \neq i} g_j$, stąd możemy zapisać $G = g_i + G_{-i} = g_i + \sum_{j \neq i} g_j$.

(i) Zapisz problem optymalizacyjny i-tego człona plamienia. Zapisz odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.

(ii) Znajdź odwzorowanie najlepszej odpowiedzi każdego z członków plemienia.

(iii) Czy w tej grze będzie występował efekt gapowicza*? Kto będzie na niego najbardziej narażony?*

(iv) Znajdź optymalną alokację kokosów w plamieniu Gradów.

8.2 Efekty zewnętrzne

Zadanie 8.7 ([CN00]) *Fabryka celulozy produkuje przy kosztach krańcowych $MC_F(q) = 2q$. Koszty zewnętrzne dla otoczenia opisane są za pomocą funkcji $MC_S(q) = q$. Popyt na produkt firmy przyjmuje postać $D(q) = 280 - 2q$.*

(i) Załóżmy, że firma zachowuje się doskonale konkurencyjnie. Podaj cenę i wielkość produkcji, w przypadku gdy firma nie uwzględnia kosztów zewnętrznych.

(ii) Jak zmieni się poziom produkcji i cena, jeśli firma będzie uwzględniała efekty zewnętrzne?

(iii) Jaki podatek władze lokalne powinny nałożyć na fabrykę, aby jej poziom produkcji był taki, jak gdyby uwzględniała ona efekty zewnętrzne?

(iv) Wykonaj ponownie punkty (i)-(iii) zakładając, że firma zachowuje sie jak monopolista. Porównaj wyniki otrzymane w obydwu przypadkach.

Zadanie 8.8 ([Var97]) *Załóżmy, że w gospodarce istnieje tylko dwóch kierowców, którzy zastanawiają się jak szybko jeździć samochodem. Kierowca i wybiera prędkość x_i, dzięki której czerpie użyteczność równą $u_i(x_i)$, $i = 1, 2$. Niestety, im szybciej jeżdżą kierowcy, tym większe prawdopodobieństwo, że dojdzie do wypadku między nimi. Niech $p(x_1, x_2)$ będzie prawdopodobieństwem* *ich zderzenia. Niech p będzie rosnące względem obydwu argumentów. c_i określa koszty jakie będzie musiał ponieść każdy z graczy, jeśli dojdzie do wypadku. Niech użyteczność każdego kierowcy będzie liniowa względem pieniędzy, które posiada.*

(i) *Pokaż, że każdy z kierowców ma pokusę jeżdżenia szybciej niż wynikałoby to ze społecznego optimum.*

(ii) *Jeśli kierowca i będzie musiał zapłacić mandat t_i w razie wypadku, jak wysokie musiałoby być t_i aby zinternalizować efekt zewnętrzny szybkiej jazdy?*

(iii) *Jeśli wprowadzone zostały optymalne mandaty (jednakowe dla wszystkich kierowców), jak wysokie będą opłaty ponoszone przez kierowców w razie wypadku? Czy dzięki mandatom kierowcy będą jeździli ze społecznie optymalnymi prędkościami?*

(iv) *Załóżmy, że kierowca i otrzymuje użyteczność u_i tylko jeśli nie dojdzie do wypadku. Jak zmienia się wówczas prędkość równowagi? Jaką wysokość będą miały w tym przypadku optymalne mandaty? Czy prędkości obierane w równowadze Nasha przez kierowców będą społecznie optymalne?*

Zadanie 8.9 ([MCWG95]) *Studenci pierwszego roku są wyjątkowo pracowici. Rozpatrz zachowanie studentów w typowej, n-osobowej grupie. Student i, $i = 1, \ldots, n$, poświęca h_i godzin na naukę. Wysiłek powoduje spadek jego użyteczności według formuły $c(h_i) = \frac{1}{2}h_i^2$. Satysfakcja studenta jest uzależniona od jego relatywnej pozycji w klasie, tj. $u(h_i/\bar{h}) = \log(h_i/\bar{h})$, gdzie $\bar{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i$ określa średni czas poświęcony na naukę w grupie.*

(i) *Scharakteryzuj symetryczne równowagi Nasha w tej grze.*

(ii) *Znajdź Pareto-optymalny poziom czasu pracy każdego ze studentów. Porównaj z wynikiem otrzymanym z punkcie (i).*

8.3 Teoria kontraktów

Zadanie 8.10 ([Var97]) *Dr W. i mgr D. prowadzą zajęcia z mikroekonomii. Dr W. jest zainteresowany tym, ile godzin mgr D. prowadzi zajęć ze studentami i ile musi mu za to zapłacić. Dr W. pragnie zmaksymalizować swoją wypłatę $x - s$, gdzie x jest liczbą godzin prowadzonych zajęć przez mgr D., a s całkowitym wynagrodzeniem jakie musi mu zapłacić. Jeśli mgr D. uczy x godzin i otrzymuje za to wynagrodzenie s, jego wypłata wynosi $s - c(x)$, gdzie $c(x) = \frac{1}{2}x^2$.*

(i) Jeśli Dr W. obiera x oraz s aby zmaksymalizować swoją wypłatę, pamiętając o tym, że mgr D. musi chcieć dla niego pracować, ile godzin ćwiczeń będzie prowadził mgr D.?

(ii) Ile Dr W. zapłaci mgr D.?

(iii) Załóżmy, że Dr. W wprowadza następujący plan motywacyjny. Określa wynagrodzenie na poziomie $s(x) = ax + b$ i pozwala mgr D. samemu ustalić liczbę przepracowanych godzin. Jakie a i b maksymalizują wynagrodzenie Dr W.? Czy potrafisz podać przykład innej funkcji $s(x)$, która jeszcze bardziej powiększyłaby przychód Dr W.?