dr Łukasz Patryk Woźny
email: lukasz.wozny@sgh.waw.pl
akson.sgh.waw.pl/lwozny/
mgr Paweł Dziewulski
email: pawel.dziewulski@doktorant.sgh.waw.pl
akson.sgh.waw.pl/~pd34320/

Lista zadań - Teoria gier

Lista zadań:

Literatura

Czarny E., E. Nojszewska (2000): *Mikroekonomia. Zbiór zadań.* PWE.

Farber H. (1980): "An analysis of final-offer arbitration," *Journal of Conflict Resolution*, 35, 683–705.

Fudenberg D., J. Tirole (2002): *Game theory.* MIT Press, Cambridge.

Gibbons R. (1992): *Game Theory for Applied Economists.* Princeton University Press.

Hotelling H. (1929): "Stability in competition," 39, 41–57.

Mas-Collel A., M. D. Whinston, J. R. Greene (1995): *Microeconomic Theory.* Oxford University Press.

Myerson R. B. (1991): *Game Theory: Analysis of Conflict.* Harvard University Press.

Nash J. (1950): "The bargaining problem," *Econometrica*, 18, 155–162.

——— (1953): "Two person cooperative games," *Econometrica*, 21, 128–140.

Varian H. (1992): *Microeconomic Analysis.* W.W. Norton & Company, New York.

1 Wprowadzenie do gier niekooperacyjnych

Zadanie 1.1 (Porównywanie monet (*matching pennies*)) *Gracz* $i = 1, 2$, *układa niezależnie na stole monetę, odwracając ją jedną ze stron do góry (orłem - O lub reszką - R), tak by przeciwnik jej nie widział. Następnie gracze jednocześnie odsłaniają swoje monety. Macierz wypłat zamieszczono poniżej.*

	R	*O*
R	*1,-1*	*-1,1*
O	*-1,1*	*1,-1*

Znajdź równowagi Nasha gry w strategiach czystych i mieszanych.

Zadanie 1.2 *Znajdź równowagi Nasha (w strategiach czystych) gry pomiędzy graczami:* 1 *(wybierającym jeden z wierszy:* U, D*),* 2 *(wybierającym jedną z kolumn:* L, R*) oraz* 3 *(wybierającym jedną z macierzy* A, B, C*) z wypłatami:*

	L	*R*
U	*0,0,3*	*0,0,0*
D	*1,0,0*	*0,0,0*

A

	L	*R*
U	*2,2,2*	*0,0,0*
D	*0,0,0*	*2,2,2*

B

	L	*R*
U	*0,0,0*	*0,0,0*
D	*0,1,0*	*0,0,3*

C

Zadanie 1.3 (Fudenberg i Tirole (2002)) *Każdy z graczy* $i = 1, 2, 3$ *może zagłosować na jedną z trzech alternatywnych decyzji* A, B, C*. Decyzje podejmowane są symultanicznie, a żaden z graczy nie może się wstrzymać od głosu. Wygrywa ta alternatywa która dostanie największą liczbę głosów. Jeżeli żadna z alternatyw nie wygra, wtedy wybrana zostaje alternatywa* A*. Wypłaty graczy są zależne od wybranej alternatywy:* $u_1(A) = u_2(B) = u_3(C) = 2$, $u_1(B) = u_2(C) = u_3(A) = 1$, $u_1(C) = u_2(A) = u_3(B) = 0$.

(i) Zapisz grę w postaci strategicznej;

(ii) Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych tej gry.

Zadanie 1.4 (Gra w cykora (*play chicken*)) *Dwóch kierowców w rozpędzonych samochodach jedzie w swoim kierunku wąską drogą na czołowe zderzenie. Każdy z nich ma trzy strategie: jechać prosto* (JP)*, w ostatniej chwili skręcić w lewo* (SL) *lub w ostatniej chwili skręcić w prawo* (SP)*. Jeśli* *jeden z kierowców skręci w lewo albo w prawo, podczas gdy drugi pojedzie prosto, wygrywa ten który pojechał prosto (drugi jest cykorem). Jeśli obaj pojadą prosto, giną tragicznie w wypadku, podobnie jak w sytuacji, gdy jeden i drugi postanowią w ostatniej chwili skręcić w przeciwnych kierunkach (wtedy także dochodzi do zderzenia czołowego, np.: (SL, SP) lub (SP, SL)). Jeśli się miną, nikt nie wygrywa. Wypłaty zapisano w macierzy poniżej.*

	SL	*JP*	*SP*
SL	*0,0*	*-10,10*	*-100,-100*
JP	*10,-10*	*-100,-100*	*10,-10*
SP	*-100,-100*	*-10,10*	*0,0*

(i) *Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych.*

(ii) *Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach mieszanych.*

(iii) *Jeśli gracze grają strategie mieszane, jaka jest szansa, że w ściśle mieszanej równowadze Nasha kierowcy unikną wypadku?*

Zadanie 1.5 (Varian (1992)) *Rozpatrz poniższą grę.*

	L	*P*
G	*2,2*	*-1,-1*
D	*-1,-1*	*1,1*

(i) *Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych.*

(ii) *Czy występują w tej grze równowagi Pareto-lepsze od innych?*

(iii) *Załóżmy, że gracz pierwszy (wybierający strategie G,D) wykonuje ruch jako pierwszy i zobowiązuje się do swojej strategii. Czy policzone równowagi w punkcie (i) dalej są równowagami Nasha?*

Zadanie 1.6 (Fudenberg i Tirole (2002)) *Pokaż, że w poniższej grze występuje dokładnie jedna równowaga Nasha (w strategiach czystych albo mieszanych).*

	L	*M*	*R*
U	*1,-2*	*-2,1*	*0,0*
M	*-2,1*	*1,-2*	*0,0*
D	*0,0*	*0,0*	*1,1*

(Podpowiedź: Pokaż, że w grze występuje jedna równowaga Nasha w strategiach czystych; następnie pokaż, że żaden z graczy nigdy jednocześnie nie przypisze ściśle dodatnich wag do strategii U i M (odpowiednio L i M); wreszcie pokaż, że waga przypisana do strategii U (odpowiednio L) jest dodatnia wtt gdy waga przypisana do strategii M jest dodatnia.)

Zadanie 1.7 (Myerson (1991)) *Znajdź równowagi w strategiach czystych dla poniższej gry z trzema graczami, w której strategie gracza pierwszego są określone za pomocą $S_1 = \{U, D\}$, drugiego $S_2 = \{L, R\}$, a trzeciego $S_3 = \{A, B\}$*

	L	*R*
U	*0,0,0*	*6,5,4*
D	*5,4,6*	*0,0,0*

A

	L	*R*
U	*4,6,5*	*0,0,0*
D	*0,0,0*	*0,0,0*

B

Zadanie 1.8 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Gracze podejmują decyzje w sprawie inwestycji, która przyniesie im* \$100 *zysku, ale muszą określić jak zostanie on podzielony. Negocjacje wyglądają następująco. Każdy z graczy jednocześnie zgłasza swoje żądanie co do wysokości zysku. Jeśli suma ich żądań jest większa niż* \$100, *nie dochodzi do porozumienia i zrywają negocjacje nie otrzymując nic w zamian. Jeśli suma ich żądań jest mniejsza niż* \$100, *każdy dostaje tyle ile żądał, a reszta zostaje przeznaczona na cele charytatywne.*

(i) *Podaj silnie zdominowane strategie każdego z graczy.*

(ii) *Podaj słabo zdominowane strategie każdego z graczy.*

(ii) *Jakie są równowagi Nasha w strategiach czystych podanej gry? Czy istnieją równowagi Pareto-optymalne?*

Zadanie 1.9 (**Fudenberg i Tirole** (**2002**)) *Rozpatrz problem dzielenia tortu pomiędzy dwie osoby. Jeśli wypłaty (części tortu) przypisane graczowi* 1 *i* 2 *odpowiednio oznaczymy jako x i y, to wektor (x, y) jest dostępny wtt gdy $x \geqslant x_0$, $y \geqslant y_0$ oraz $g(x, y) \leqslant 1$, gdzie g jest różniczkowalną funkcją, rosnącą względem obydwu zmiennych (np. $g(x, y) = x + y$). Niech $g(x_0, y_0) < 1$. Załóż, że zbiór dostępnych alokacji jest wypukły, a (x_0, y_0) określa* status quo. *Nash (1950) zaproponował aksjomat, który implikował, że "właściwym" sposobem podziału tortu jest alokacja (x^*, y^*) maksymalizująca iloczyn odległości graczy od statusu quo $(x - x_0)(y - y_0)$, przy ograniczaniu $g(x, y) \leqslant 1$. W Nash (1953) poszukiwana była gra, w której alokacja osiągana w równowadze Nasha reprodukowałyby alokację zadaną przez Nasha aksjomatycznie.*

Załóż, że gracze jednocześnie określają swoje propozycje co do podziału tortu. Jeśli (x, y) jest dostępna, każdy z graczy dostaje tyle ile zaproponował. W przeciwnym wypadku każdy z nich dostaje odpowiednio x_0 i y_0. Pokaż, że (i) istnieje kontinuum równowag Nasha w strategiach czystych tej gry. Co więcej, (ii) pokaż, że każda efektywna alokacja (x, y) (tj. dla której $g(x, y) = 1$), jest równowagą Nasha w strategiach czystych. (iii) Czy istnieje równowaga Nasha gry, która jest "właściwa" w rozumieniu aksjomatu Nasha? Wskaż ją.

Zadanie 1.10 (**Hotelling** (**1929**)) *W miasteczku zbudowanym wzdłuż prostej drogi, mieszkańcy zamieszkują na jej 1 milowym odcinku (miasto jest jednostajnie zagęszczone przez nieskończoną masę mieszkańców na tym odcinku). Ceny lodów w mieście są jednakowe w każdej lodziarni, dlatego każdy z konsumentów zawsze chodzi do tej, która jest najbliżej jego domu (zakładamy, że cena lodów jest na takim poziomie, iż konsument jest gotowy przejść całą milę, żeby je kupić). Jeśli dwie lodziarnie stoją w jednym miejscu, dzielą się sprzedażą po połowie.*

(i) Rozpatrz przypadek, w którym dwie lodziarnie podejmują jednocześnie decyzję o swojej lokalizacji. Pokaż, że istnieje dokładnie jedna równowaga Nasha w strategiach czystych, w której obydwie lodziarnie obierają lokalizację dokładnie w środku miasta.

(ii) Pokaż, że jeśli rozpatrzymy taką samą grę z trzema graczami, to nie istnieje równowaga Nasha gry w strategiach czystych.

Zadanie 1.11 *Rozpatrz grę jak w zadaniu 1.10, ale tym razem załóż, że dwie firmy są ulokowane na dwóch różnych krańcach miasteczka, a ich strategiami są ceny po jakich będą sprzedawać lody. Koszt produkcji jednostki lodów wynosi dla obydwu firm c. Konsument pragnący kupić lody w jednej z firm musi ponieść koszt t za każdą jednostkę odległości, która dzieli go od danej firmy.*

Każdy z konsumentów kupuje maksymalnie jednego loda, przy czym zawsze decyduje się on na zakup w firmie, w której łączny koszt (cena plus koszt transportu w jedną stronę) jest najniższy, o ile nie przekroczy on pewnego poziomu $\bar{s}$ - w przeciwnym wypadku konsument rezygnuje z zakupu.

(i) *Zapisz popyt na dobro sprzedawane przez każdą z firm (dla uproszczenia załóż na początku że $\bar{s} = +\infty$).*

(ii) *Znajdź równowagę Nasha w strategiach czystych podanej gry.*

(iii) *Dla jakich kosztów produkcji i transportu obydwie firmy obsługują każdego konsumenta w mieście?*

Zadanie 1.12 (Inspekcja) *Rozpatrz następującą grę pomiędzy pracownikiem i pracodawcą. Pracownik może w pracy zarówno pracować (W) jak i bumelować (S). Jeśli pracownik pracuje, ponosi koszt g, zaś produkt jego pracy jest wart v dla pracodawcy. Pracodawca może zarówno przeprowadzić inspekcję w pracy (I), lub jej nie przeprowadzać (NI). W razie przeprowadzenia inspekcji pracodawca jednoznacznie jest w stanie określić czy pracownik bumeluje czy nie, jednak musi ponieść koszt h. Pracodawca musi zapłacić wynagrodzenie w wysokości w pracownikowi, chyba że ma jednoznaczne dowody na to, że pracownik bumelował. Jeśli pracownik zostanie przyłapany na bumelowaniu, otrzymuje 0. Pracownik i pracodawca podejmują swoje decyzje jednocześnie. Niech $w > g > h > 0$.*

(i) *Czy w grze występują słabo lub ściśle zdominowane strategie?*

(ii) *Znajdź wszystkie równowagi Nasha w podanej grze.*

(iii) *Jakie jest prawdopodobieństwo inspekcji w równowadze Nasha?*

Zadanie 1.13 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz dwuosobową grę w następującej formie.*

	b_1	b_1
a_1	u,v	l,m
a_2	w,x	y,z

Pokaż, że zawsze istnieje równowaga Nasha w strategiach mieszanych (Podpowiedź: zdefiniuj strategię gracza 1 jako prawdopodobieństwo wybrania strategii a_1, a strategię gracza 2 jako prawdopodobieństwo obrania strategii b_1; następnie przeanalizuj odwzorowania najlepszej odpowiedzi obydwu graczy).

Zadanie 1.14 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz następującą grę.*

	LL	*L*	*M*	*R*
U	*100,2*	*-100,1*	*0,0*	*-100,-100*
D	*-100,-100*	*100,-49*	*1,0*	*100,2*

(i) Jako gracz 2 (wybierając strategie LL, L, M, R), bez możliwości komunikacji z graczem 1 przed grą, którą strategię byś obrał?

(ii) Jakie są równowagi Nasha (w strategiach czystych i mieszanych) w powyższej grze?

(iii) Czy strategia obrana w podpunkcie (i) należy do strategii obieranych w jednej z równowag? Czy Twoja strategia należy do strategii zracjonalizowanych[1].

(iv) Jeśli by umożliwiono komunikację między graczami przed rozpoczęciem gry, obrałbyś inną strategię niż w podpunkcie (i)?

Zadanie 1.15 *Armia A ma jeden samolot, który może wysłać, aby zniszczył jeden z trzech możliwych celów. Armia B ma działo przeciwlotnicze, które może obronić jeden wybrany cel przed atakiem. Wartość celu wynosi* v_i, *gdzie* $v_1 > v_2 > v_3 > 0$. *Armia A może zniszczyć cel jeżeli go zaatakuje i nie będzie on broniony przez działo armii B. Celem armii A jest maksymalizacja oczekiwanej straty armii B, a celem armii B jest minimalizacja oczekiwanej straty. Zapisz problem jako (ściśle konkurencyjną) grę w postaci strategicznej i znajdź jej równowagi w strategiach mieszanych.*

Zadanie 1.16 *Rozpatrz aukcję jako grę symultaniczną. Mamy* $\{1, \ldots, n\}$ *graczy, a i-ty gracz ceni dobro będące przedmiotem aukcji na poziomie* v_i. *Niech* $v_1 > v_2 > \ldots > v_n > 0$. *Mechanizm aukcji jest następujący. Każdy z graczy symultanicznie zgłasza swoją (nieujemną) ofertę w zamkniętej kopercie a przedmiot jest przekazywany do gracza, który da najwyższą ofertę. Jeżeli kilku graczy da takie same oferty, przedmiot otrzymuje gracz o najniższym numerze i, z tych z równymi ofertami. Aukcja jest aukcją pierwszej ceny, tzn. gracz którego oferta została wybrana płaci tyle ile wskazał w ofercie. Pokaż, że w każdej równowadze Nasha aukcji pierwszej ceny przedmiot otrzymuje gracz* 1.

[1] *Strategiami zracjonalizowanymi* nazywamy strategie, które otrzymano w wyniku iteracyjnej eliminacji strategii, które nigdy nie są najlepszą odpowiedzią.

Zadanie 1.17 *W duopolu funkcja popytu rynkowego względem ceny ma postać $D(p) = A - p$, $A > 0$. Obie firmy mają stałe, choć różne, koszty krańcowe produkcji, odpowiednio c_x i c_y. Wylicz produkcję każdej firmy i całego rynku, cenę oraz zyski firm jeśli: (i) obie zachowują się zgodnie z modelem Cournot, (ii) jedna odgrywa rolę lidera, druga - zachowuje się zgodnie z modelem Cournota, (iii) pojawia się zmowa. Co by było gdyby rynek miał charakter doskonale konkurencyjny? Jak zmieniają się zyski firm pod wpływem zmiany własnych kosztów i kosztów rywala?*

Zadanie 1.18 *Ponownie rozpatrz konkurencję Cournot pomiędzy I identycznymi podmiotami. Niech popyt na produkowane dobro będzie opisany za pomocą $p(Q) = a - bQ$. Koszty produkcji każdej z firm i wynoszą $c_i(q_i) = cq_i$. (i) Znajdź równowagę Nasha w strategiach czystych. (ii) Sprawdź jak zachowuje się równowaga gdy $I \to +\infty$. (iii) Co się dzieje z zyskami firm? Skomentuj.*

Zadanie 1.19 (Czarny i Nojszewska (2000)) *Na rynku oligopolistycznym działa dziesięć firm, operujących przy zerowych kosztach zmiennych. Popyt na dobro jest opisany funkcją $D(p) = 600 - 0.25p$. Oblicz wielkość produkcji reprezentatywnej firmy w równowadze Cournot.*

Zadanie 1.20 *Krzywą reakcji firmy 1 opisuje funkcja $q_1^*(q_2) = 80 - 0.5q_2$, a firmy 2: $q_2^*(q_1) = 80 - 0.5q_1$. Obie firmy operują przy stałych kosztach zmiennych. O ile wyższa będzie cena ustalona w równowadze na rynku oligopolistycznym, od ceny ustalanej na rynku doskonale konkurencyjnym?*

Zadanie 1.21 *Rozpatrz model Bertranda pomiędzy dwoma firmami symultanicznie wybierającymi cenę $p_i \in [0, \infty)$ na homogeniczny produkt. Koszty krańcowe są jednakowe i stałe dla obydwu firm $MC_1 = MC_2 = c > 0$. Popyt na dobro jest zadany ciągłą, malejącą funkcją $D : [0, \overline{p}] \to \mathbb{R}_+$ z $D(\overline{p}) = 0$. Ponieważ produkt jest homogeniczny, cały popyt zaspokoi firma o niższej cenie. Jeżeli ceny są równe, popyt D jest dzielony po połowie dla każdej firmy. Zapisz funkcje wypłaty obu firm, znajdź równowagę Nasha tej gry i udowodnij, że jest ona jedyna.*

Zadanie 1.22 (Varian (1992)) *Załóżmy, że na rynku występują dwie firmy ze stałymi kosztami krańcowymi, oznaczonymi odpowiednio przez c_1 i c_2. Niech $c_1 < c_2$. Rynek jest gotów zakupić $Q > 0$ jednostek dobra od producenta oferującego niszą cenę. Jeśli ceny producentów są jednakowe, popyt jest dzielony między nich równo po połowie. Firmy są w stanie zaspokoić całe zapotrzebowanie rynku.*

(i) Zapisz postać indywidualnej funkcji popytu każdej z firm (zależnej od ceny firmy i jej konkurenta).

(ii) *Znajdź równowagę Nasha w strategiach czystych tej gry, jeśli firmy produkujące homogeniczny produkt i konkurują ze sobą cenowo (przestrzeń strategii graczy to zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, $\mathbb{R}_+$).*

(iii) *Jak kształtowałyby się ceny i ilości dóbr na rynku, gdyby firmy zachowywały się doskonale konkurencyjnie?*

Zadanie 1.23 (Varian (1992)) *Niech popyt na rynku dobra x będzie liniowy, a koszty krańcowe dwóch operujących na nim firm jednakowe i stale równe c. Pokaż, że w konkurencji Cournot ceny są zawsze wyższe, a ilości dóbr mniejsze, niż w przypadku konkurencji Bertranda.*

Zadanie 1.24 *Niech koszty krańcowe dwóch firm operujących na rynku będą określone przez c_1 i c_2. Niech $c_1 < c_2$. Pokaż, że w przypadku zawiązania kartelu $q_1 > q_2$. Dla uproszczenia przyjmij założenie o liniowości popytu.*

Zadanie 1.25 (Varian (1992)) *Rozpatrz rynek, na którym operują dwie firmy z zerowymi kosztami krańcowymi. Popyt jest zadany za pomocą funkcji $p(Q) = 100 - Q$, gdzie $Q = q_1 + q_2$, q_1, q_2 są poziomami produkcji odpowiednio pierwszej i drugiej firmy.*

(i) *Znajdź równowagę doskonale konkurencyjną na tym rynku. Ile wynosi wówczas łączna podaż Q?*

(ii) *Jeśli firmy konkurują ze sobą pod względem ilości produkcji, jaki będzie poziom Q w równowadze? Jaka będzie cena?*

Zadanie 1.26 *W poniższym zadaniu rozpatrzysz model Bertranda ze zróżnicowanym produktem. Załóżmy występowanie na rynku dwóch firm, z których każda produkuje trochę inny produkt. Popyt na dobro firmy $i = 1, 2$ będzie określony przez $D_i(p_1, p_2) = \alpha_i - \beta_i(p_i - p_{-i})$. Koszty krańcowe są stałe i wynoszą odpowiednio c_1 i c_2. Jeśli firmy konkurują ze sobą cenowo, jaki będzie poziom produkcji i ceny w równowadze? Czy firmy będą skłonne do określania ceny na poziomie kosztu krańcowego? Uzasadnij i zinterpretuj ekonomicznie.*

Zadanie 1.27 (Varian (1992)) *Rozpatrzmy gospodarkę złożoną z dwóch osób, czerpiących użyteczność z konsumpcji dobra prywatnego ($x_i, i = 1, 2$) oraz publicznego (G). Każdy z nich ma jednakowe preferencje $u(x_i, G) = G^\alpha x_i^{1-\alpha}$, $i = 1, 2$, ale różne zasoby początkowe (odpowiednio w_1 i w_2). Wartość dobra publicznego G jest proporcjonalna do składek konsumentów ($G = g_1 + g_2$, gdzie g_i określa składkę i-tego konsumenta).*

(i) *Znajdź równowagę Nasha w strategiach czystych w podanej grze.*

(ii) *Znajdź optymalne alokacje, maksymalizujące sumę użyteczności obydwu graczy.*

(iii) *Pokaż wielkość* efektu gapowicza *u każdego z graczy.*

(iv) *Jak duża musi by różnica pomiędzy dochodami obydwu graczy, aby w równowadze $g_2 = 0$, tj. całe dobro publiczne było finansowane przez pierwszego gracza?*

Zadanie 1.28 (Czarny i Nojszewska (2000)) *W gospodarce jest produkowane jedno dobro publiczne (G) i jedno dobro prywatne (x). Krzywą możliwości produkcyjnych można zapisać za pomocą $Y = \{(x, G) : x^2 + 100G = 5000\}$. W gospodarce żyje 100 osób, o jednakowych preferencjach opisanych przez $u_i(x_i, G) = x_i^{\frac{1}{2}} G^{\frac{1}{2}}$, $i = 1, \ldots, 100$, gdzie x_i określa konsumpcję dobra prywatnego i-tej osoby (przyjmij $x_i = \frac{x}{100}$).*

(i) *Ile wynosi optymalny poziom produkcji każdego z dóbr?*

(ii) *Jaki jest poziom użyteczności jednostki w alokacji Pareto-optymalnej?*

Zadanie 1.29 *Rozpatrz następującą grę jako rozwiązanie problemu finansowania dyskretnego dobra publicznego. Każdy z dwóch podmiotów określa swój udział b_i, $i = 1, 2$, w finansowaniu dobra publicznego. Jeśli $b_1 + b_2 \geqslant c$, dobro publiczne zostaje sfinansowane, a każdy z agentów musi zapłacić określoną wcześniej kwotę. W przeciwnym wypadku, żaden z nich nic nie płaci. Jeśli w_i określa początkowy majątek każdego z podmiotów, to ich użyteczność możemy zapisać jako*

$$u_i(w_i, b_i, c_i) = \begin{cases} w_i - b_i + c & \textit{gdy} \quad b_1 + b_2 \geqslant c, \\ w_i & \textit{w.p.p.} \end{cases}$$

(i) *Pokaż, że w równowadze $b_1 + b_2 = c$ albo $b_1 = b_2 = 0$. Czy w tej grze występują słabo zdominowane strategie? Wskaż je.*

(ii) *Określ wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych tej gry.*

(iii) *Określ rozwiązania Pareto-optymalne tej gry. Czy należą one do zbioru równowag?*

(iv) *Czy istnieją równowagi, w których dobro nie jest finansowane?*

Zadanie 1.30 *Rozpatrz grę jak w zadaniu 1.29, lecz tym razem funkcja użyteczności podmiotów ma postać*

$$u_i(w_i, b_i, c_i) = \begin{cases} \log(w_i - b_i + c) & gdy \quad b_1 + b_2 \geqslant c, \\ \log w_i & w.p.p. \end{cases}$$

(i) *Określ wszystkie równowagi Nasha tej gry.*

(ii) *Określ rozwiązania Pareto-optymalne tej gry. Czy należą one do zbioru równowag?*

(iii) *Porównaj wyniki z tymi uzyskanymi w zadaniu 1.29. Ile tym razem istnieje optymalnych rozwiązań? Jeśli $w_1 < w_2$, który z graczy będzie musiał zapłacić wyższą składkę?*

(iv) *Czy istnieją równowagi, w których dobro nie jest finansowane?*

Zadanie 1.31 (Varian (1992)) *Pewne nieodkryte plemię* Grads *zamieszkujące serce amazońskiej puszczy, charakteryzuje się tym, że jego członkowie konsumują wyłącznie orzechy kokosowe. Kokosy służą im do dwóch celów. Mogą je jeść, albo poświęcać w ofierze bogom, podczas rytualnych obrzędów.*

Załóżmy, że każdy i-ty, $i = 1, \ldots, n$, członek plemienia Grad ma początkowy zasób kokosów równy $w_i > 0$. Niech $x_i \geqslant 0$ określa ilość kokosów konsumowanych, a $g_i \geqslant 0$ ilość kokosów poświęcanych w ofierze przez i-tego członka plemienia. Całkowita ilość kokosów przeznaczanych na ofiarę wynosi tym samym $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$. Użyteczność każdego z Gradów jest opisana za pomocą

$$u_i(x_i, G) = x_i + a_i \log G,$$

gdzie $a_i > 0$. Niech $G_{-i} = \sum_{j \neq i} g_j$, stąd możemy zapisać $G = g_i + G_{-i} = g_i + \sum_{j \neq i} g_j$.

(i) *Zapisz problem optymalizacyjny i-tego członka plamienia. Zapisz odpowiadającą mu funkcję Lagrange'a.*

(ii) *Znajdź odwzorowanie najlepszej odpowiedzi każdego z członków plemienia.*

(iii) *Niech $(\forall i) a_i = a$. Znajdź symetryczną równowagę Nasha w strategiach czystych przedstawionej gry.*

(iv) *Czy w tej grze będzie występował* efekt gapowicza*? Kto będzie na niego najbardziej narażony?*

(v) Znajdź optymalną alokację kokosów w plamieniu Gradów.

Zadanie 1.32 (Czarny i Nojszewska (2000)) *Fabryka celulozy produkuje przy kosztach krańcowych $MC_F(q) = 2q$. Koszty zewnętrzne dla otoczenia opisane są za pomocą funkcji $MC_S(q) = q$. Popyt na produkt firmy przyjmuje postać $D(q) = 280 - 2q$.*

(i) Załóżmy, że firma zachowuje się doskonale konkurencyjnie. Podaj cenę i wielkość produkcji, w przypadku gdy firma nie uwzględnia kosztów zewnętrznych.

(ii) Jak zmieni się poziom produkcji i cena, jeśli firma będzie uwzględniała efekty zewnętrzne?

(iii) Jaki podatek władze lokalne powinny nałożyć na fabrykę, aby jej poziom produkcji był taki, jak gdyby uwzględniała ona efekty zewnętrzne?

Zadanie 1.33 (Varian (1992)) *Załóżmy, że w gospodarce istnieje dwóch kierowców, którzy zastanawiają się jak szybko jeździć samochodem. Kierowca i wybiera prędkość x_i, dzięki której czerpie użyteczność równą $u_i(x_i)$, $i = 1, 2$. Niech u_i będzie funkcją rosnącą, wklęsłą i różniczkowalną. Im szybciej jeżdżą kierowcy, tym większe prawdopodobieństwo, że dojdzie do wypadku między nimi. Niech $p(x_1, x_2)$ będzie prawdopodobieństwem ich zderzenia. Niech p będzie rosnące względem obydwu argumentów i różniczkowalna. c_i określa koszty jakie będzie musiał ponieść każdy z graczy, jeśli dojdzie do wypadku. Niech użyteczność każdego kierowcy będzie liniowa względem pieniędzy, które posiada.*

(i) Pokaż, że każdy z kierowców ma pokusę jeżdżenia szybciej niż wynikałoby to ze społecznego optimum.

(ii) Jeśli kierowca i będzie musiał zapłacić mandat t_i w razie wypadku, jak wysokie musiałoby być t_i aby zinternalizować efekt zewnętrzny szybkiej jazdy?

(iii) Jeśli wprowadzone zostały optymalne mandaty (jednakowe dla wszystkich kierowców), jak wysokie będą opaty ponoszone przez kierowców w razie wypadku? Czy dzięki mandatom kierowcy będą jeździli ze społecznie optymalnymi prędkościami?

(iv) Załóżmy, że kierowca i otrzymuje użyteczność u_i tylko jeśli nie dojdzie do wypadku. Jak zmienia się wówczas prędkość równowagi? Jaką wysokość będą miały w tym przypadku optymalne mandaty? Czy prędkości obierane w równowadze Nasha przez kierowców będą Pareto lepsze niż w grze z podpunktu (i)?

Zadanie 1.34 (**Mas-Collel, Whinston i Greene** (**1995**)) *Grupa studentów pierwszego roku jest wyjątkowo pracowita. Rozpatrz zachowanie studentów w typowej, n-osobowej grupie. Student i, $i = 1, \ldots, n$, poświęca h_i godzin na naukę. Wysiłek powoduje spadek jego użyteczności według formuły $c(h_i) = \frac{1}{2}h_i^2$. Satysfakcja studenta jest uzależniona od jego relatywnej pozycji w klasie, tj. $u(h_i/\bar{h}) = \log(h_i/\bar{h})$, gdzie $\bar{h} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i$ określa średni czas poświęcony na naukę w grupie.*

(i) *Scharakteryzuj symetryczne równowagi Nasha w tej grze.*

(ii) *Znajdź Pareto-optymalny poziom czasu pracy każdego ze studentów. Porównaj z wynikiem otrzymanym z punkcie (i).*

Zadanie 1.35 (**Gibbons** (**1992**)) *Załóżmy, że występuje I farmerów, z których każdy ma prawo do wypasania krów na wspólnym pastwisku. Ilość mleka produkowanego przez pojedynczą krowę zależy od całkowitej liczby krów wypasających się na pastwisku. Dochód dla farmera i posiadającego n_i krów wynosi $n_i v(N)$, dla $N < \bar{N}$, oraz $v(N) \equiv 0$ dla $N > \bar{N}$, gdzie $v(0) > 0, v'(\cdot) < 0, v''(\cdot) \leqslant 0$. Krowy są doskonale podzielne, a koszt jednostki krowy wynosi c. Niech $v(0) > c$.*

Farmerzy jednocześnie decydują ile krów kupić, a wszystkie zakupione krowy pasą się na jednym pastwisku.

(i) *Zapisz grę w postaci strategicznej.*

(ii) *Znajdź równowagę Nasha gry w strategiach czystych i porównaj generowaną przez nie alokację z alokacją społecznie optymalną.*

(iii) *Przedyskutuj związek tej gry z modelem konkurencji Cournot.*

[Gra została zainspirowana dyskusją zaprezentowaną przez Hume'a w jego pracy z 1739 roku.]

Zadanie 1.36 (**Fudenberg i Tirole** (**2002**)) *W aukcji dwóch graczy jednocześnie podejmuje decyzję o swoich ofertach. Każda oferta musi być nieujemną wielokrotnością jednego centa. Gracz z największą ofertą wygrywa jednego dolara. Jeśli oferty są jednakowe, żaden z graczy nie wygrywa. Każdy z graczy musi zapłacić sumę zaproponowaną w ofercie, niezależnie od tego czy wygra, czy nie (przegrany też płaci). Użyteczność każdego z graczy jest równa jego majątkowi netto (gracze są neutralni wobec ryzyka).*

Zaproponuj symetryczną równowagę Nasha w strategiach mieszanych, w której każda oferta poniżej \$1 ma przypisane ściśle dodatnie prawdopodobieństwo.

Zadanie 1.37 (**Varian** (**1992**)) *W poniższej grze znajdź równowagi w strategiach zdominowanych.*

	L	*S*	*P*
G	*3,3*	*0,3*	*0,0*
S	*3,0*	*2,2*	*0,2*
D	*0,0*	*2,0*	*1,1*

Następnie znajdź wszystkie równowagi Nasha gry w strategiach czystych. Co możesz powiedzieć o równowagach w strategiach zdominowanych i równowagach Nasha?

Zadanie 1.38 (**Fudenberg i Tirole** (**2002**)) *Udowodnij, że jeśli po iteracyjnym eliminowaniu strategii ściśle zdominowanych pozostaje dokładnie jeden profil strategii, to musi on być równowagą Nasha.*

Zadanie 1.39 (**Mas-Collel, Whinston i Greene** (**1995**)) *Pokaż, że kolejność nie ma wpływu na postać zbioru strategii, które przetrwały proces iteracyjnej eliminacji strategii ściśle zdominowanych.*

Zadanie 1.40 (**Fudenberg i Tirole** (**2002**)) *Udowodnij, że (i) jeśli gracz ma dwie słabo dominujące strategie, to dla każdej strategii obranej przez drugiego gracza, muszą one dawać taką samą wypłatę. (ii) Podaj przykład gry dwuosobowej, w której gracz pierwszy ma dwie słabo dominujące strategie, ale gracz drugi preferowałby, żeby gracz pierwszy obierał tylko jedną z nich.*

Zadanie 1.41 (**Mas-Collel, Whinston i Greene** (**1995**)) *Pokaż, że każda ściśle dominująca strategia w grze* $\{I, \{\Delta(S_i)\}, \{u_i(\cdot)\}\}$ *jest strategią czystą.*

Zadanie 1.42 (**Varian** (**1992**)) *Rozpatrz poniższą grę.*

	L	*P*
G	*a,b*	*c,d*
D	*e,f*	*g,h*

(i) Jeśli (G, L) *jest równowagą w strategiach dominujących, jakie warunki muszą spełniać* $a, \ldots, h$*?*

(ii) *Jeśli (G, L) jest równowagą Nasha, które z warunków zapisanych z punkcie (i) muszą być spełnione?*

(iii) *Jeśli (G, L) jest równowagą w strategiach dominujących, to czy musi ona być równowagą Nasha?*

Zadanie 1.43 (Varian (1992)) *Rozpatrz następującą grę.*

	L	S	P
G	1,0	1,2	2,-1
S	1,1	1,0	0,-1
D	-3,-3	-3,-3	-3,-3

(i) *Wskaż strategie obu graczy, które są ściśle zdominowane.*

(ii) *Wskaż strategie obu graczy, które są słabo zdominowane.*

(iii) *Spróbuj znaleźć równowagi w strategiach dominujących, a następnie wszystkie równowagi Nasha. Co możesz powiedzieć o tych dwóch typach równowag? Która jest pojęciem słabszym, a która mocniejszym (w sensie inkluzji)?*

Zadanie 1.44 *Pokaż, że w poniższej grze żadna z równowag Nasha w strategiach czystych nie jest globalnie stabilna.*

	L	S	P
G	0,0	4,5	5,4
S	5,4	0,0	4,5
D	4,5	5,4	0,0

Zadanie 1.45 *Rozpatrz następujący przypadek gry Cournot pomiędzy dwoma graczami. Popyt rynkowy wynosi $p(Q) = \max\{0; 1 - Q\}$, a koszty produkcji każdej z firm wynoszą $c_i(q_i) = cq_i, 0 < c < 1$.*

(i) *Pokaż, że istnieje dokładnie jedna równowaga Nasha w strategiach czystych.*

(ii) *Pokaż, że równowaga określona w punkcie (i) jest globalnie stabilna.*

(iii) *Pokaż, że proces iteracyjnej eliminacji strategii ściśle zdominowanych prowadzi do równowagi określonej w punkcie (i) [Podpowiedź: posłuż się rysunkiem].*

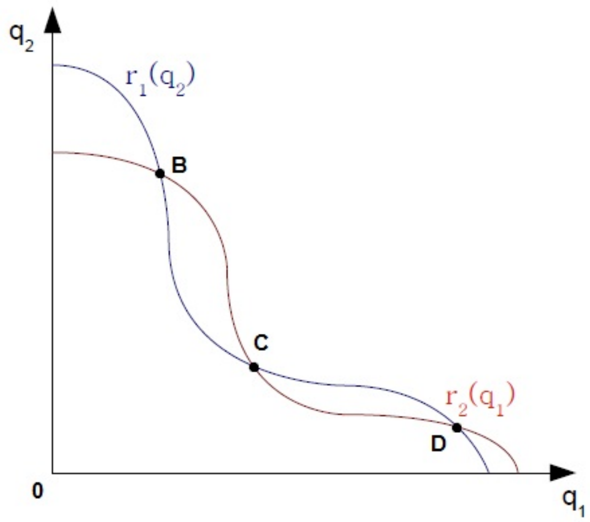
(iv) *Udowodnij bezpośrednio (tj. bez wykorzystywania twierdzenia Pearce'a (1984)), że równowaga określona w punkcie (i) jest zbiorem strategii zracjonalizowanych.*

Zadanie 1.46 (**Mas-Collel, Whinston i Greene** (**1995**)) *Rozpatrz model Cournot, w którym dwie firmy, 1 i 2, jednocześnie determinują poziomy produkcji, które będą sprzedawały na rynku, odpowiednio q_1 i q_2. Popyt rynkowy wynosi $p(Q) = a - bQ$, gdzie $Q = q_1 + q_2$. Stały jednostkowy koszt produkcji wynosi c.*

(i) *Udowodnij, że iteracyjna metoda eliminacji strategii ściśle zdominowanych prowadzi do jedynego rozwiązania powyższej gry.*

(ii) *Czy to samo miałoby miejsce, gdyby na rynku działało trzech graczy?*

Zadanie 1.47 *W grze Cournot z trzema równowagami Nasha i funkcjami najlepszej odpowiedzi przedstawionymi na rysunku poniżej, określ zbiór strategii powstały w wyniku iteracyjnej eliminacji strategii ściśle zdominowanych.*



Zadanie 1.48 (**Fudenberg i Tirole** (**2002**)) *Gospodarka doskonale konkurencyjna może być opisana za pomocą gry z kontinuum graczy. Koncepcje iteracyjnej dominacji, racjonalizowalności i równowagi Nasha, z niewielkimi modyfikacjami, mogą być zastosowane do tego typu problemów. Rozpatrz*

następujący problem "rynku zboża": występuje kontinuum farmerów indeksowanych parametrem i o rozkładzie gęstości $f(i)$ na przedziale $[\underline{i}, \bar{i}]$, gdzie $\underline{i} > 0$. Każdy farmer określa swoją podaż zboża $q(i)$ zanim nastąpi otwarcie rynku. Funkcja kosztu farmera i wynosi $c(q,i) = \frac{q^2}{2i}$. Użyteczność farmera jest jednoznaczna z uzyskiwanym przez niego zyskiem i przyjmuje postać $u_i = pq(i) - \frac{q(i)^2}{2i}$, gdzie p określa cenę zboża na rynku. Niech $O(p)$ określa zagregowaną podaż farmerów, którzy doskonale przewidują cenę p:

$$O(p) = \left(\int_{\underline{i}}^{\bar{i}} if(i)di \right) p \equiv kp.$$

Popyt rynkowy przyjmuje postać $D(p) = a - bp$ dla $0 < p < \frac{a}{b}$ oraz 0 w przeciwnym wypadku. W grze farmerzy podejmują decyzje jednocześnie odnośnie podaży zboża, a następnie ustalana jest cena czyszcząca rynek:

$$\int_{\underline{i}}^{\bar{i}} q(i)f(i)di = D(p).$$

Równowagą doskonale konkurencyjną (równowagą Nasha) będziemy nazywać cenę p^*, dla której $O(p^*) = D(p^*)$ (precyzyjniej, równowagą będzie taki profil strategii $q^*(\cdot)$, dla którego $q^*(i) = ip^*$). Zauważ, że $p^* = \frac{a}{b+k}$.

Zastosuj w tej grze iteracyjną metodę eliminacji strategii ściśle zdominowanych.

(i) Pokaż, że dla $b > k$ powyższą grę można rozwiązać poprzez eliminację strategii ściśle zdominowanych, prowadzącą do równowagi doskonale konkurencyjnej.

(ii) Pokaż, że ta równowaga jest globalnie stabilna. Narysuj proces dochodzenia do równowagi (tatônnement), w którym gra jest powtarzana wielokrotnie, a farmerzy określają swoje oczekiwania co do przyszłej ceny na poziomie ceny określonej w poprzedzającej rozgrywce.

Zadanie 1.49 (**Mas-Collel, Whinston i Greene** (**1995**)) *Na rynku występuje I firm, z których każda pragnie przekonać parlament o przyznanie jej subsydiów. Niech h_i będzie określało czas poświęcony przez firmę i na lobbing, zaś $c_i(h_i) = w_i h_i^2$ jego koszt, gdzie w_i jest ściśle dodatnią stałą. Jeśli profil czasu poświęconego na lobbing przez wszystkie firmy ma postać $(h_1, \ldots, h_I)$, parlament określa subsydia dla każdej z firm na poziomie $\alpha \sum_i h_i + \beta \prod_i h_i$, gdzie α i β są stałe.*

Rozpatrz grę, w której firmy jednocześnie i niezależnie od siebie określają cza poświęcany na lobbing. Pokaż, że każda z firm ma dominującą strategię wtt gdy beta $= 0$. Jaka jest ściśle dominująca strategia każdego z graczy w takim wypadku?

Zadanie 1.50 (Fudenberg i Tirole (2002)) *W grze gracz 1 wybiera rzędy $\{U, D\}$, gracz 2 kolumny $\{L, R\}$, za gracz 3 macierze $\{A, B, C, D\}$. W poniższych macierzach zapisano wyłącznie wypłaty gracza 3.*

	L	*R*
U	*9*	*0*
D	*0*	*0*

A

	L	*R*
U	*0*	*9*
D	*9*	*0*

B

	L	*R*
U	*0*	*0*
D	*0*	*9*

C

	L	*R*
U	*6*	*0*
D	*0*	*6*

D

Pokaż, że strategia D nie jest dla gracza 3 najlepszą odpowiedzią na żadną z mieszanych strategii pozostałych graczy. Następnie pokaż, że strategia D nie jest *strategią zdominowaną. Skomentuj.*

Zadanie 1.51 *Rozpatrz następującą grę. Gracz 1 określa strategie $\{U, D\}$, zaś gracz drugi $\{L, R\}$. Wypłaty zapisano poniżej.*

	L	*R*
U	*5,1*	*0,0*
D	*4,4*	*1,5*

(i) Znajdź wszystkie równowagi Nasha zaprezentowanej gry.

Rozpatrz ponownie powyższą grę, ale załóż tym razem, że każdy z graczy obserwuje urządzenie wysyłające do każdego z nich sygnały A, B oraz C, z których każdy występuje z równym prawdopodobieństwem. Jeśli wystąpi stan A, gracz pierwszy jest o tym doskonale informowany, jednak jeśli wystąpi stan B lub C, gracz pierwszy nie wie który z nich wystąpił (wie tylko, że jeden z tych stanów rzeczywiście wystąpił). Gracz 2 jest doskonale poinformowany gdy wystąpił stan C, jednak nie jest w stanie odróżnić stanów A i B.

Schemat gry jest następujący. Gracze wpierw obserwują sygnał, a następnie określają swoje strategie.

(ii) Znajdź wszystkie równowagi skorelowane zaprezentowanej gry.

(iii) Jakie są wypłaty graczy w równowadze? Czy gracze byliby bardziej skłonni do prowadzenia gry jak w punkcie (i) czy (ii)?

Zadanie 1.52 *Rozpatrz następującą grę. Gracz* 1 *określa strategie* $\{U, D\}$*, gracz drugi* $\{L, R\}$*, zaś gracz* 3 *wybiera macierze* $\{A, B, C\}$*. Wypłaty zapisano poniżej.*

A:

	L	*R*
U	*0,1,3*	*0,0,0*
D	*1,1,1*	*1,0,0*

B:

	L	*R*
U	*2,2,2*	*0,0,0*
D	*2,2,0*	*2,2,2*

C:

	L	*R*
U	*0,1,0*	*0,0,0*
D	*1,1,0*	*1,0,3*

(i) Znajdź wszystkie równowagi Nasha zaprezentowanej gry.

Rozpatrz ponownie powyższą grę, ale załóż tym razem, że każdy z graczy obserwuje rzut monetą, w którym wypada orzeł (H) lub reszka (T), na podstawie którego określa swoją strategię. Gracze 1 *i* 2 *doskonale obserwują każdy z sygnałów, podczas gdy gracz* 3 *nie otrzymuje żadnej informacji (wie jedynie, że dokonuje się rzutu monetą).*

Schemat gry jest następujący. Gracze wpierw obserwują sygnał, a następnie określają swoje strategie.

(ii) Znajdź wszystkie równowagi skorelowane zaprezentowanej gry.

(iii) Jakie są wypłaty graczy w równowadze? Czy gracze byliby bardziej skłonni do prowadzenia gry jak w punkcie (i) czy (ii)?

Zadanie 1.53 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz następującą aukcję (zwaną aukcją* drugiej ceny *lub aukcją* Vickrey'a*). Przedmiot jest licytowany przez* I *graczy. Waluacja przedmiotu dla gracza* i *wynosi* v_i*. Wszyscy gracze jednocześnie składają oferty w zapieczętowanych kopertach. Po otwarciu ofert, przedmiot otrzymuje gracz, który dał najwyższą ofertę, jednak musi on zapłacić za przedmiot wartość określoną przez drugą największą ofertę. Jeśli więcej niż jeden gracz złoży taką samą ofertę, każdy z nich ma taką samą szansę otrzymania przedmiotu. Pokaż, że oferta w wysokości* v_i *jest słabo dominującą strategią gracza* i*. Pokaż również, że jest to jedyna słabo dominująca strategia gracza* i*.*

Zadanie 1.54 *Rozpatrz poniższą grę.*

	L	R
U	1,1	2,0
D	0,2	2,2

Znajdź równowagę Nasha powyższej gry w strategiach czystych. Czy wszystkie z określonych równowag są również równowagami drżącej ręki*?*

Zadanie 1.55 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz następującą grę pomiędzy trzema graczami, w której zbiory strategii graczy* 1, 2, 3 *to odpowiednio* $S_1 = \{U, D\}, S_2 = \{L, R\}, S_3 = \{B_1, B_2\}$.

	L	R
U	1,1,1	1,0,1
D	1,1,1	0,0,1

B_1

	L	R
U	1,1,0	0,0,0
D	0,1,0	1,0,0

B_2

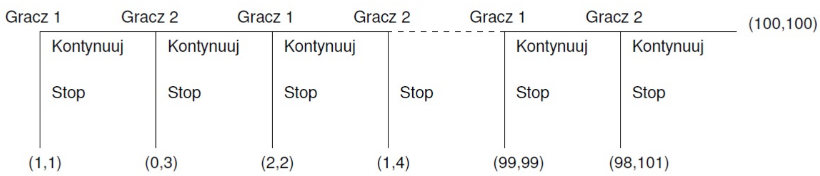
Znajdź wszystkie równowagi Nasha w strategiach czystych powyższej gry. Pokaż, że profil (D, L, B_1) *nie jest równowagą* drżącej ręki, *pomimo że żadna z tych strategii nie jest słabo zdominowana.*

Zadanie 1.56 *Pokaż, że każda skończona gra w postaci strategicznej posiada równowagę* drżącej ręki.

2 Gry ekstensywne

Zadanie 2.1 *Zapisz gry z zadań 1.1-1.5 w postaci ekstensywnej.*

Zadanie 2.2 (Gra w stonogę (*centipede game*)) *W skończonej grze z pełną informacją dwóch graczy rozpoczyna grę mając przed sobą* \$1. *Następnie na przemian decydują, czy chcą kontynuować grę* (*c*)*, czy ją zakończyć* (*s*)*. Jeśli gracz zdecyduje się kontynuować grę* (*c*)*, sędzia zabiera mu* \$1 *i dokłada* \$2 *przeciwnikowi. Jeśli gracz zakończy grę (powie* stop *-* *s*)*, gracze otrzymują wypłaty, które zgromadziły się dotychczas na ich kontach. Jeśli żaden z graczy nie powie* stop*, gra kończy się gdy będą mieli po* \$100 *każdy.*



Znajdź równowagę Nasha doskonałą ze względu na podgry. Czy istnieją profile strategii dające Pareto-lepsze wypłaty?

Zadanie 2.3 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz grę pomiędzy graczami* $i = 1, 2$*, z pośród których każdy może obierać strategie* a_i *ze skończonego zbioru* M_i*, zawierającego* m_i *elementów. Wypłaty każdego z graczy są uzależnione od obranej pary strategii* (a_1, a_2)*,* $\phi_i(a_1, a_2)$*.*

(i) *Załóż, że gracze podejmują decyzje jednocześnie. Ile wówczas każdy z nich ma strategii?*

(ii) *Załóż, że gracz* 1 *podejmuje decyzję pierwszy, następnie gracz* 2 *obserwuje decyzję gracza* 1 *i podejmuje własną decyzję. Ile wówczas każdy z graczy ma możliwych strategii?*

(iii) *Niech w grze jak w podpunkcie (iii) będzie wiele SPNE. Pokaż, że w takiej sytuacji istnieją co najmniej dwie takie pary strategii* (a_1, a_2) *oraz* (a'_1, a'_2) *(gdzie* $a_1 \neq a'_1$ *oraz* $a_2 \neq a'_2$*), dla których zachodzi*

$$\phi_1(a_1, a_2) = \phi_1(a'_1, a'_2) \tag{1}$$

lub

$$\phi_2(a_1, a_2) = \phi_2(a'_1, a'_2) \tag{2}$$

(iv) *Załóż, że dla dowolnych dwóch par strategii* $(a_1, a_2), (a'_1, a'_2)$ *(gdzie* $a_1 \neq a'_1$ *oraz* $a_2 \neq a'_2$*), warunek (2) nie jest spełniony (tj. gracz* 2 *nigdy nie jest obojętny wobec dwóch różnych profili strategii). Załóż dodatkowo, że istnieje równowaga Nasha gry w strategiach czystych z podpunktu (i), w której gracz* 1 *otrzymuje wypłatę* π_1*. Pokaż, że w dowolnym SPNE gry z podpunktu (ii), gracz* 1 *otrzymuje co najmniej* π_1*. Czy ta konkluzja musi być prawdziwa dla dowolnego SPNE w grze z podpunktu (iii)?*

(v) *Skonstruuj przykład ukazujący, że konkluzja z podpunktu (iv) nie jest spełniona zarówno gdy warunek (2) jest spełniony dla niektórych* (a_1, a_2), (a'_1, a'_2) $(a_1 \neq a'_1$ *oraz* $a_2 \neq a'_2)$ *lub gdy zamienimy część twierdzenia* równowaga Nasha gry w strategiach czystych *na* równowaga Nasha gry w strategiach mieszanych.

Zadanie 2.4 (**Fudenberg i Tirole** (**2002**)) *Rozpatrz rynek oligopolistyczny ze strategicznie determinowanymi inwestycjami. Na rynku występują dwie firmy, z których każda ma stałe koszty jednostkowe równe* 2*. Firma* 1 *może uruchomić nową technologię, która umożliwi jej produkcję po stałych kosztach jednostkowych równych* 0*; koszty samej instalacji wynoszą* f*. Firma* 2 *obserwuje decyzję firmy* 1*. W momencie, gdy firma* 1 *podjęła swoją decyzję, obydwie firmy określają poziomy swojej produkcji, odpowiednio* q_1 *i* q_2*, na zasadach konkurencji Cournot. Gra jest tym samym dwuokresowa.*

Załóżmy, że popyt rynkowy przyjmuje postać $p(Q) = 14 - Q$*, a celem każdej firmy jest maksymalizacja zysku.*

(i) *Zapisz funkcję zysku firmy* 1 *oddzielnie dla przypadku gdy podejmuje ona inwestycje i gdy ich nie podejmuje.*

(ii) *Znajdź równowagę Cournot-Nasha dla drugiego etapu gry, oddzielnie dla przypadku gdy firma* 1 *podjęła inwestycje i ich nie podjęła. Podaj zyski obydwu firm dla każdego z przypadków.*

(iii) *Znajdź równowagę Nasha doskonałą ze względu na podgry dla opisanej gry. Jak zależy ona od kosztów instalacji nowej technologii* f*? Kiedy firma* 1 *podejmie inwestycję w równowadze Nasha doskonałej ze względu na podgry?*

Zadanie 2.5 *Ponownie rozpatrz zadanie 1.23. Jeśli firma* 1 *będzie zachowywa się jak lider (jako pierwsza będzie podejmowała decyzję dotyczącą produkcji), a* 2 *jako naśladowca (będzie podejmowała decyzję jako druga), jaka będzie ilość dobra produkowana w równowadze Stackelberga? Na jakim poziomie zostanie ustalona cena?*

Zadanie 2.6 *Na oligopolistycznym rynku dobra x działa 7 firm. Pierwsza z nich, o kosztach $TC_1(q_1) = \frac{1}{3}q_1^3 + 2q_1 + 5$, zdominowała rynek i przyjęła pozycję lidera. Koszty pozostałych firm mają postać: $TC_i(q_i) = \frac{1}{2}q_i^2 + 20$, $i = 2, \ldots, 7$. Funkcja popytu na dobro x ma postać: $Q(p) = 800 - 4p$. Oblicz wielkość produkcji każdej z firm i, cenę na rynku w równowadze Nasha doskonałej ze względu na podgry przy założeniu, że firmy konkurują wielkością produkcji.*

Zadanie 2.7 *Różnica pomiędzy równowagami w konkurencji Stackelberga i konkurencji Cournot wynika przede wszystkim z faktu, że w konkurencji Stackelbarga lider rynkowy podejmuje wiarygodne zobowiązanie co do swojego poziomu produkcji. W poniższym zadaniu rozwiążesz przykład, który pokaże, że w momencie gdy lider nie może podejmować wiarygodnych zobowiązań, równowaga Stackelberga nie jest równowagą Nasha.*

Rozpatrz model Stackelberga z dwoma firmami, opisanymi odpowiednio za pomocą stałych kosztów jednostkowych c_1 i c_2. Firma 1 jest liderem rynkowym, zaś popyt na dobro opisuje funkcja $p(Q) = 1 - Q$, gdzie $Q = q_1 + q_2$ określa łączną podaż obydwu firm.

(i) Znajdź równowagę Nasha doskonałą ze względu na podgry powyższej gry. Oznacz poziomy produkcji obydwu firm w tej równowadze za pomocą pary (q_1^*, q_2^*).

(ii) Pokaż, że q_1^* nie jest *najlepszą odpowiedzią firmy 1 na strategię q_2^* firmy 2. Skomentuj.*

Zadanie 2.8 (Czarny i Nojszewska (2000)) *Rynek oligopolistyczny tworzy 11 firm sprzedających homogeniczny produkt. Jedna z nich zdominowała rynek i przyjęła pozycję przywódcy* ***cenowego****. Funkcja kosztów firmy dominującej przyjmuje postać $TC_1(q_1) = 3q_1^2$. Koszty pozostałych 10 są opisane za pomocą $TC_i(q_i) = 10q_i^2$, $i = 2, \ldots, 11$. Popyt rynkowy jest następujący: $D(p) = 600 - 3p$. Oblicz poziom produkcji każdej z firm oraz cenę ustaloną w równowadze na rynku.*

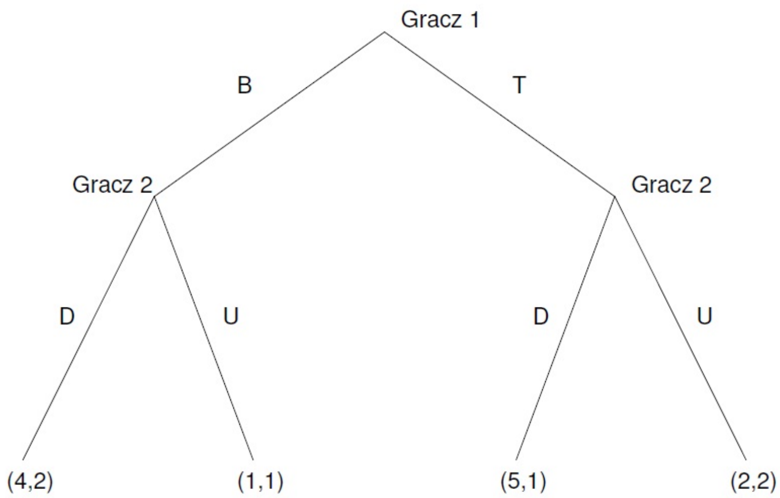
Zadanie 2.9 (Fudenberg i Tirole (2002)) *Rozpatrz głosowanie, w którym uczestniczy trzech graczy: 1, 2 i 3, wybierających pomiędzy trzema alternatywami A, B i C. Opcja B jest statusem quo, zaś A i C są reformatorskie. W pierwszej turze, wszyscy głosujący wybierają pomiędzy dwoma reformami A i C. Wygrywa opcja, która zdobędzie większość, przy czym żaden gracz nie może się wstrzymać od głosu. Następnie gracze przystępują do drugiego głosowania, w którym decydują pomiędzy statusem quo i zwycięską opcją z głosowania poprzedzającego. Ponownie wygrywa opcja, która zdobędzie większość, bez możliwości wstrzymywania się od głosu przez graczy.*

W każdej turze gracze głosują jednocześnie. Wypłaty graczy są uzależnione jedynie od opcji wybieranej na samym końcu, niezależnie od przebiegu głosowania. Wypłaty graczy wynoszą: $u_1(A) = 2, u_1(B) = 0, u_1(C) = 1; u_2(A) = 1, u_2(B) = 2, u_3(C) = 0; u_3(A) = 0, u_3(B) = 1, u_3(C) = 2$.

(i) Co by było, gdyby w każdej turze każdy z graczy głosował na opcję, która w danym etapie głosowania jest dla niego najlepsza?

(ii) Znajdź równowagę Nasha doskonałą ze względu na podgry, przy dodatkowym założeniu, że nie można wyeliminować żadnej strategii słabo zdominowanej. Co się stanie, jeśli dopuścimy możliwość eliminacji strategii słabo zdominowanych?

Zadanie 2.10 (**Mas-Collel, Whinston i Greene** (**1995**)) *Rozpatrz następującą grę.*



(i) Znajdź równowagi Nasha doskonałe ze względu na podgry. Czy jest jedyna? Czy występują inne równowagi Nasha (w strategiach czystych lub mieszanych)?

(ii) Załóżmy, że gracz 2 nie obserwuje ruchów gracza 1. Zapisz nową postać ekstensywną tej gry. Jakie są równowagi Nasha w zmodyfikowanej wersji gry (w strategiach czystych i mieszanych)?

Zadanie 2.11 (**Mas-Collel, Whinston i Greene** (**1995**)) *Na rynku występują dwie nisze, mała* (M) *i duża* (D)*. Dwie firmy decydują jednoczenie czy chcą wejść na rynek. Jeśli firma nie wchodzi na rynek* (NW)*, otrzymuje* *wypatę* 0*. Jeśli firma wejdzie na rynek* (W)*, a druga nie, pierwsza firma przejmuje wszystkich klientów i otrzymuje zysk równy* 2*.*

Jeśli obie firmy wejdą na rynek, jednocześnie podejmują decyzję o niszy, na której chcą operować. Obie firmy ponoszą straty jeśli wybiorą tę samą niszę, przy czym straty są większe jeśli wspólnie wybiorą małą niszę (M) *(załóżmy, że każda firma odnosi stratę* -6 *jeśli obie wybiorą* M *oraz* -3 *jeśli wybiorą* D*). Jeśli jedna firma wybierze dużą niszę* (D)*, a druga małą* (M)*, to firma operująca na dużym rynku odnosi zysk, a druga stratę, przy czym strata ta jest mniejsza niż w przypadku, gdyby obie firmy obrały tę samą niszę (firma operująca na dużym rynku otrzymuje zysk równy* 1*, a druga stratę równą* -1*).*

(i) *Zapisz grę w postaci ekstensywnej.*

(ii) *Zapisz grę w postaci strategicznej.*

(iii) *Znajdź wszystkie równowagi Nasha doskonałe ze względu na podgry w strategiach czystych.*

(iv) *Znajdź równowagi Nasha w strategiach czystych podanej gry. Czy istnieją równowagi Nasha, w których któryś z graczy stosuje groźby bez pokrycia (*empty threats*)?*

Zadanie 2.12 (Fudenberg i Tirole (2002)) *Gracze* 1 *i* 2 *muszą zdecydować, czy wziąć parasol wychodząc z domu. Każdy z nich wie, że występuje* 50% *szans na to, że będzie padało. Wypłaty każdego z graczy są następujące:* -5 *jeśli gracz nie wziął parasola i padał deszcz;* -2 *jeśli wziął parasol i padało;* -1 *jeśli wziął parasol i nie padało oraz* 1 *jeśli nie wziął parasola i nie padało. Gracz* 1 *dowiaduje się jaka będzie pogoda przed wyjściem z domu. Gracz* 2 *nie ma pewności jaka będzie pogoda, ale może obserwować zachowanie gracza* 1*.*

(i) *Zapisz grę w postaci ekstensywnej.*

(ii) *Czy można tę grę rozwiązać poprzez eliminację strategii zdominowanych?*

Zadanie 2.13 (Fudenberg i Tirole (2002)) *Rozpatrz grę pomiędzy dwoma graczami: rządem oraz reprezentatywnym gospodarstwem domowym. Gospodarstwo może wybrać dwie akcje* $a_h \in \{0, 1\}$ *i otrzymać transfer od rządu w wysokości* $t \in \{0, 1\}$*. Celem gospodarstwa jest maksymalizacja transferu pomniejszonego o koszty akcji (równe 0, gdy* $a_h = 0$*, oraz równe* $\frac{1}{2}$ *gdy* $a_h = 1$*). Celem rządu jest minimalizacja sumy* $2(a_h - 1)^2 + t$*. Zanim gospodarstwo podejmie decyzję, rząd ogłasza schemat przyznawania transferów* $t(a_h)$*, tzn. wartość transferu jest zależna od wybranej akcji* a_h*.*

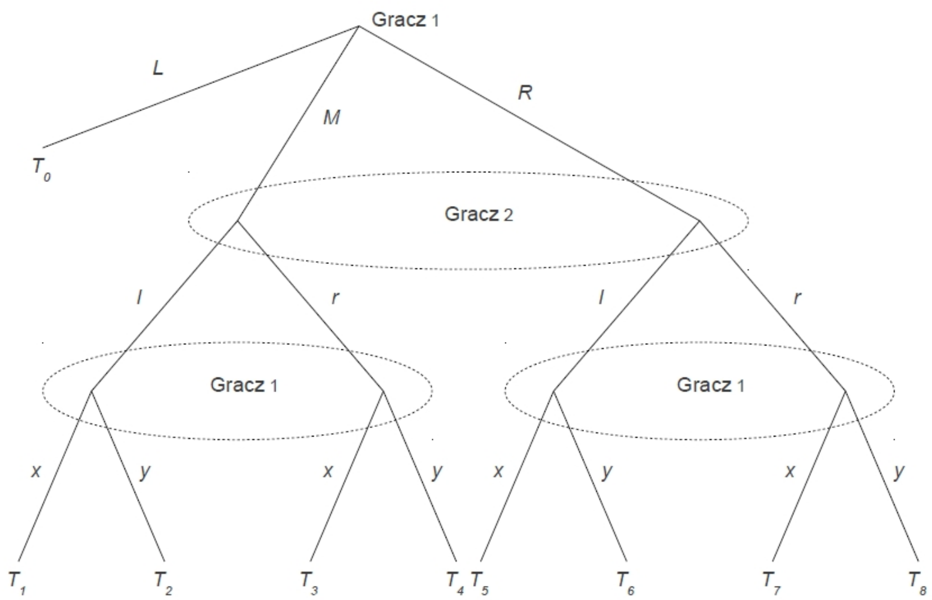
(i) *Narysuj drzewo decyzyjne odpowiadające grze w postaci ekstensywnej, w której decyzje rządu są wiążące, tzn. ogłoszony w pierwszym etapie schemat transferów będzie rzeczywiście wykonany.*

(ii) *Narysuj drzewo decyzyjne odpowiadające grze w postaci ekstensywnej, w której decyzje rządu nie są wiążące, tzn. ogłoszony (obiecany) w pierwszym etapie schemat transferów może być zmieniony po wybraniu przez gospodarstwo swojej akcji.*

(iii) *Przedstaw obydwie gry w postaci strategicznej.*

(iv) *Podaj równowagi doskonałe dla obu gier.*

Zadanie 2.14 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz grę pomiędzy dwoma graczami, która została zapisana z postaci ekstensywnej na poniższym rysunku (z pominięciem wypłat).*



(i) *Jakie są dopuszczalne strategie gracza* 1*? Jakie są strategie gracza* 2*?*

(ii) *Pokaż, że dla dowolnej strategii behawioralnej, którą mógłby zagrać gracz* 1*, istnieje ekwiwalentna strategia mieszana na strategiach gracza* 1*, tj. taka, która przypisuje takie samo prawdopodobieństwo do każdego z końcowych węzłów gry, co strategia behawioralna, dla dowolnych strategii gracza* 2*.*

(iii) *Pokaż, że wynik odwrotny do twierdzenia z punktu (ii) również jest prawdziwy.*

(iv) *Załóżmy, że modyfikujemy powyższą grę, łącząc dwa zbiory informacyjne gracza* 1 *w drugiej turze jego ruchu, tak by wszystkie cztery węzły były w tym samym zbiorze informacyjnym. Pokaż, że gra przestaje być grą z doskonałą pamięcią. Które z twierdzeń z podpunktów (ii) i (iii) pozostaje prawdziwe?*

Zadanie 2.15 *Rozpatrz gospodarkę Samuelsona, w której w każdym okresie* t *rodzi się jeden gracz i żyje przez dwa okresy: jako mody w* t *oraz jako stary w* $t+1$. *Tak więc w każdym okresie* t *żyje dwóch graczy: młody urodzony w* t *i stary, urodzony w* $t-1$. *Każdy z graczy rodzi się z jedną tabliczką czekolady, której nie może przechowywać z okresu na okres. Użyteczność z konsumpcji czekolady wynosi* $u(c) = -1$ *jeżeli* $c < 0.3$ *oraz* $u(c) = c$ *dla* $c \geqslant 0.3$, *gdzie* c *to konsumowana część czekolady. Gracze mogą oddać czekoladę pozostałym graczom ale nie mogę jej sprzedać (bo czekolada to jedyne dobro). Decyzją gracza jest* $x \in [0, 1]$, *tj. część czekolady, którą chce skonsumować jako młody i oddać* $1 - x$ *dla starych. Decyzje wszystkich poprzednich graczy są wspólną wiedzą. Nie występuje dyskontowanie.*

- *Znajdź jedyną równowagę Nasha, jeżeli gra toczy się w skończonym horyzoncie* T.
- *Jeżeli horyzont gry jest nieskończony, jakie są (dwie) równowagi doskonałe? Pokaż, że są one Pareto-uporządkowane.*

Zadanie 2.16 (Fudenberg i Tirole (2002)) *Występuje sprzedawca, kupiec oraz dwa okresy. W okresie* 1 *sprzedawca określa poziom inwestycji* I, *której koszt wynosi* $I \geqslant 0$. *W okresie* 2, *sprzedawca może sprzedać jednostkę dobra kupującemu, ale musi przy tym ponieść koszt dostawy* $c(I)$, *gdzie* $c'(0) = -\infty$, $c'(\cdot) < 0$, $c''(\cdot) > 0$, *oraz* $c(0) < v$, *gdzie* v *określa waluację dobra dla kupjcego. W grze nie wystpuje dyskontowanie, a społecznie optymalny poziom inwestycji* I^* *spłenia warunek* $1 + c'(I^*) = 0$.

(i) *Załóż, że w okresie* 2 *kupujący obserwuje poziom inwestycji* I *i przedkłada ofertę* take-it-or-leave-it *sprzedawcy. Jaka będzie oferta kupca? Jaka jest równowaga Nasha doskonała ze względu na podgry tej gry?*

(ii) *Zaproponuj kontrakt, który gracze podpisywaliby w okresie* 1, *dzięki któremu możliwe by było osiągnięcie alokacji optymalnej (załóż, że wartość kontraktu nie może by uzależniana od poziomu* I*).*

Zadanie 2.17 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Udowodnij, że każda skończona gra* Γ_E *w postaci ekstensywnej, ma mieszaną równowagę Nasha, doskonałą ze względu na podgry.*

3 Gry powtarzalne

Zadanie 3.1 (**Mas-Collel, Whinston i Greene** (**1995**)) *Poniższa gra, w której decyzje są podejmowane jednocześnie, jest grana dwa razy.*

	b_1	b_2	b_3
a_1	*10,10*	*2,12*	*0,13*
a_2	*-12,2*	*5,5*	*0,0*
a_3	*13,0*	*0,0*	*1,1*

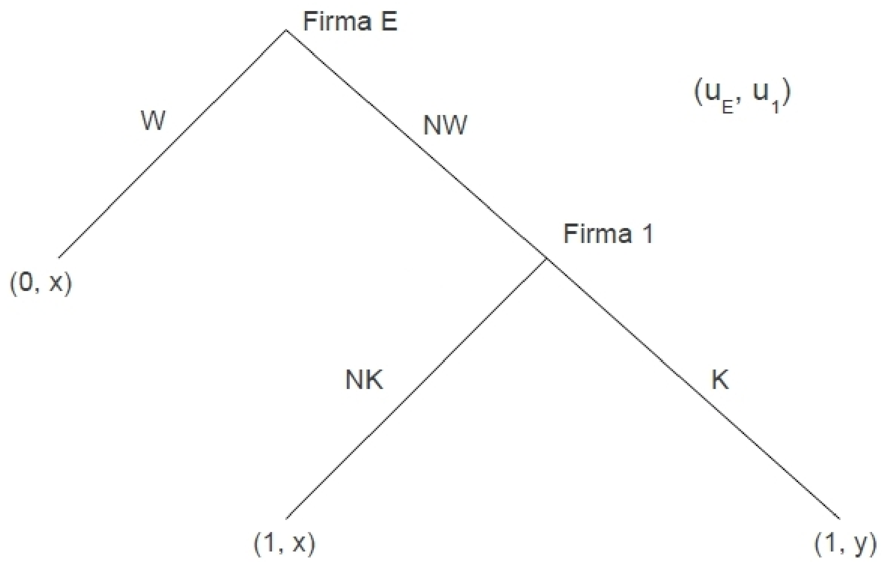
Gracze obserwują strategie i wypłaty przeciwnika po pierwszym etapie gry zanim przystąpią do drugiej rozgrywki. Podaj równowagi Nasha doskonałe ze względu na podgry tej gry.

Zadanie 3.2 *Rozpatrzmy grę powtarzalną z nieskończonym horyzontem czasowym, w której dwaj gracze dyskontują wypłaty z poszczególnych okresów czynnikiem dyskontującym równym* $\frac{1}{2}$. *Gra rozgrywana w każdym okresie zadana jest poniższą macierzą. Udowodnij, że* $((A, A), (A, A), \ldots)$ *nie jest ścieżką decyzji w równowadze doskonałej (SPNE).*

	A	D
A	*2,3*	*1,5*
D	*0,1*	*0,1*

Zadanie 3.3 *W chwili* 0 *firma* 1 *jest obecna na rynku urządzeń elektronicznych, podczas gdy firma* E *rozpatruje wejście na ten rynek. Aby rozpocząć działalność, firma* E *musi ponieść koszt* $K > 0$. *Firma* E *może wejść na rynek tylko w chwili* 0.

W grze występują trzy okresy produkcyjne. W każdym okresie, w którym obydwie firmy są aktywne, firmy grają grę przedstawioną poniżej. Firma E *decyduje czy wyjść z rynku* (W) *czy nie wychodzić* (NW)*, podczas, gdy firma* 1 *decyduje się łagodnie, bądź ostro konkurować z firmą* E *(odpowiednio* NK *i* K*). Jeśli firma* E *zdecyduje się wyjść z rynku, wychodzi z niego na zawsze. Podczas każdego okresu, gdy firma* E *jest poza rynkiem, otrzymuje wypłatę* 0. *Firma* 1 *otrzymuje wypłaty zgodnie z rysunkiem. Czynnik dyskontujący dla obydwu firm jest równy* δ.



Załóż, że

(A1) $x > z > y$,

(A2) $y + \delta x > (1 + \delta)x$,

(A3) $1 + \delta > K$.

(i) Jaka jest (jedyna) SPNE podanej gry?

(ii) Załóż, że firma E posiada ograniczenia finansowe, tj. jeśli firma 1 *zdecyduje się choć raz ostro konkurować z firmą E (w dowolny okresie), firma E będzie zmuszona do opuszczenia rynku począwszy od tego okresu. Jaka jest (jedyna) SPNE powyższej gry? (Jeśli odpowiedź zależy od wartości parametrów w sposób, który nie został uwzględniony w założeniach (A1)-(A3), wskaż w jaki sposób).*

4 Asymetria informacyjna

Zadanie 4.1 *Ponownie rozpatrz grę z zadania 2.10. Załóżmy, że gracz* 2 *obserwuje prawdziwy ruch gracza* 1 *z prawdopodobieństwem* $p \in (0, 1)$*, a nieprawdziwy z prawdopodobieństwem* $1 - p$ *(np.: jeśli gracz* 1 *gra* T*, to gracz* 2 *obserwuje* T *z prawdopodobieństwem* p *oraz* B *z prawdopodobieństwem* $1-p$*). Załóżmy, że każdy z graczy zna wartość* p*. Zapisz ponownie ekstensywną formę gry. Zakładając, że graczom zależy na maksymalizacji oczekiwanej wypłaty, znajdź wszystkie słabe doskonałe równowagi bayesowskie (WPBE).*

Zadanie 4.2 (Myerson (1991)) *Rozpatrz grę bayesowską z niepełną informacją, w której gracz* 1 *może być zarówno typu* α *jak i* β*, przy czym gracz* 2 *wie, że jest typu* α *z prawdopodobieństwem* 0.9 *i typu* β *z szansą* 0.1*. W zależności od typu gracza* 1 *wypłaty graczy wyglądają następująco,*

$t = \alpha$

	x_2	y_2
x_1	*2,2*	*-2,0*
y_1	*0,-2*	*0,0*

$t = \beta$

	x_2	y_2
x_1	*0,2*	*1,0*
y_1	*1,-2*	*2,0*

(i) Pokaż, że istnieje równowaga bayesowska, w której gracz 2 *wybiera strategi* x_2*.*

Poczta elektroniczna. *Teraz załóż, że struktura informacyjna gry ulega zmianie, a gracze mogą się komunikować przez rozpoczęciem właściwej gry. Jeśli gracz* 1 *jest typu* β*, to nigdy nie wysyła on listu do gracza* 2*. W przeciwnym wypadku, gracz* 1 *wysyła wiadomość do gracza* 2 *z informacją: "Nie jestem graczem typu* β*". Następnie, za każdym razem gdy jeden z graczy otrzyma list, automatycznie odpisuje drugiemu z informacją: "Potwierdzam otrzymanie twojej ostatniej wiadomości". Załóżmy, że każdy list z szansą* $\frac{1}{10}$ *nie dochodzi do adresata. Oznacza to, że w momencie gdy gracz* 1 *wybiera swoją strategię wie, czy jest typu* α *czy* β*; jeśli jest* α*, to wie ile listów otrzymał od gracza* 2*. Gdy gracz* 2 *wybiera swoją strategię, wie ile listów otrzymał od gracza* 1*.*

(ii) Po tym jak gracze przestają sobie wysyłać wiadomości, jakie prawdopodobieństwo gracz 2 *przypisze zdarzeniu, że list wysłany przez gracza* 1 *został zgubiony (tj. całkowita liczba wysłanych listów jest nieparzysta)?*

(iii) *Jeśli gracz* 1 *nie jest typu* β*, jakie prawdopodobieństwo przypisze zdarzeniu, że jego list nie osiągnął adresata?*

(iv) *Pokaż, że w tak zdefiniowanej grze, nie istnieje równowaga bayesowska, w której gracz* 2 *wybiera strategię* x_2*.*

Zadanie 4.3 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz następującą sytuację. Dwie wrogie sobie armie decydują się zająć wyspę. Generałowie każdej z nich decydują jednocześnie o tym czy* zaatakować (A), *czy* nie zaatakować (NA). *Dodatkowo, każda z armii jest* silna (s) *albo* słaba (w) *z równym prawdopodobieństwem (każda z armii losuje swój typ niezależnie od przeciwnika), a jej typ jest znany tylko jej generałowi. Wypłaty są następujące. Wyspa jest warta* M *jeśli zostanie zdobyta. Armia może zdobyć wyspę, jeśli sama zaatakuje, podczas gdy druga armia nie atakuje, bądź gdy jest silna i atakuje, a druga jest słaba i atakuje. Jeśli obydwie armie są tego samego typu i obydwie atakują, żadna z nich nie zdobywa wyspy. Każda armia ponosi koszt walki, który wynosi* c_s*, jeśli jest silna lub* c_w *jeśli jest słaba* $(c_s < c_w)$*.*

(i) *Zapisz grę w postaci strategicznej.*

(ii) *Zapisz grę w postaci ekstensywnej.*

(iii) *Jeśli każdy z generałów będzie kierował się maksymalizacją oczekiwanej wypłaty, jakie będą równowagi Nasha gry w strategiach czystych [Podpowiedź: rozpatrz oddzielnie przypadki, gdy analizowana armia jest silna albo słaba]?*

Zadanie 4.4 *Rozpatrzmy zmodyfikowaną grę do tej w zadaniu 4.3. Tym razem jedna z armii zdobyła wyspę wcześniej, a generał drugiej zastanawia się czy ją odbić (zaatakować - A), czy też nie (nie atakować -* NA*). Generał armii pierwszej podejmuje decyzję jako pierwszy. Może zadecydować o odwrocie z wyspy (nie atakuje -* NA*), lub o bronieniu jej do ostatniego żołnierza (atakuje - A). Generał armii pierwszej zobowiązuje się do obranej strategii (jeśli dokona odwrotu, nie zdąży powrócić na pole bitwy, aby bronić wyspy, a jeśli zadecyduje o obronie, będzie kazał spalić wszystkie mosty, które umożliwiłyby ucieczkę jego żołnierzom). Wypłaty i koszty walki pozostają jak w zadaniu 4.3.*

(i) *Zapisz grę w postaci strategicznej.*

(ii) *Zapisz grę w postaci ekstensywnej.*

(iii) *Jeśli każdy z generałów będzie kierował się maksymalizacją oczekiwanej wypłaty, jakie będą równowagi Nasha doskonałe ze względu nad podgry w strategiach czystych?*

(iv) *Porównaj wyniki z zadaniem 4.3. Jak zobowiązania armii pierwszej wpływają na równowagi gry? Dlaczego palenie za sobą mostów wydaje się być dobrym posunięciem?*

Zadanie 4.5 (Varian (1992)) *Dr W. i mgr D. prowadzą zajęcia z teorii gier. Dr W. jest zainteresowany tym, ile godzin mgr D. prowadzi zajęć ze studentami i ile musi mu za to zapacić. Dr W. pragnie zmaksymalizować swoją wypatę $x - s$, gdzie x jest liczbą godzin prowadzonych zajęć przez mgr D., a s całkowitym wynagrodzeniem jakie musi mu zapłacić. Jeśli mgr D. uczy x godzin i otrzymuje za to wynagrodzenie s, jego wypłata wynosi $s - c(x)$, gdzie $c(x) = \frac{1}{2}x^2$.*

(i) *Jeśli dr W. obiera x oraz s aby zmaksymalizować swoją wypłatę, pamiętając o tym, że mgr D. musi chcieć dla niego pracować, ile godzin ćwiczeń będzie prowadził mgr D.?*

(ii) *Ile dr W. zapłaci mgr D.?*

(iii) *Załóżmy, że dr W. wprowadza następujący plan motywacyjny. Określa wynagrodzenie na poziomie $s(x) = ax + b$ i pozwala mgr D. samemu ustalić liczbę przepracowanych godzin. Jakie a i b maksymalizują wynagrodzenie dr W.? Czy potrafisz podać przykład innej funkcji $s(x)$, która jeszcze bardziej powiększyłaby przychód dr W.?*

Zadanie 4.6 *Dwie firmy symultanicznie podejmują decyzje o wejściu lub nie na rynek. Koszt wejścia dla i-tej firmy wynosi $\theta_i \in [0, \infty)$. Koszty wejścia dla obu firm są ich prywatną informacją i są (niezależnie) losowane z rozkładu o (wszędzie dodatniej) gęstości $p(\cdot)$. Wypłata i-tej firmy wynosi $\pi^m - \theta_i$, jeżeli firma wejdzie sama na rynek, $\pi^d - \theta_i$, jeżeli obie firmy wejdą na rynek oraz 0, gdy firma nie wejdzie na rynek. Niech $\pi^m > \pi^d > 0$, gdzie π_m to zysk monopolisty na rynku, a π^d to zysk jednej z firm w duopolu. Znajdź równowagę bayesowską i pokaż, że jest ona jedyna.*

Zadanie 4.7 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz model konkurencji Cournot jak w zadaniu 1.46. Tym razem załóż, że firma może mieć koszty c_L z prawdopodobieństwem μ oraz c_H z szansą $(1 - \mu)$, $c_H > c_L$. Znajdź równowagę bayesowską tej gry.*

Zadanie 4.8 *Rozpatrz rynek projektów inwestycyjnych. Wszystkie projekty kosztują 1. Są dwa typy projektów: dobre i złe. Projekty przynoszą zysk π lub 0. Dobry projekt przynosi zysk z prawdopodobieństwem p_G, a zły z prawdopodobieństwem p_B. Niech $p_G > p_B$. Frakcja dobrych projektów wynosi α.*

Przedsiębiorcy chcą pożyczyć pieniądze z banku na początkową inwestycję. Umowa kredytowa specyfikuje kwotę R, która powinna by spłacona bankowi. Przedsiębiorca zna typ swojego projektu, ale bank nie. W przypadku, gdy projekt się nie powiedzie przedsiębiorca ogłasza upadłość i bank nie otrzymuje swoich pieniędzy. Banki są konkurencyjne i cechują się neutralnym stosunkiem do ryzyka. Rynkowa stopa procentowa, po której banki otrzymują pieniądze, wynosi r. Załóżmy, że $p_G\pi - (1+r) > p_B\pi - (1+r)$. Znajdź R w równowadze (doskonale konkurencyjnej) i zbiór projektów sfinansowanych. Jak te wartości zależą od parametrów modelu?

Teraz załóż, że przedsiębiorca może współfinansować koszt projektu w wysokości $x \in [0,1]$, a na resztę uzyska kredyt. Przedsiębiorca ma ograniczenia płynności, tak że koszt pożyczki przedsiębiorcy na rynku wynosi $(1+\rho)x$, gdzie $\rho > r$.

(i) Przedstaw zysk przedsiębiorcy jako funkcję R, x i typu.

(ii) Opisz najlepszą (z punktu widzenia dobrobytu) separującą PBE gry, w której rozpoczyna przedsiębiorca oferując x, dalej banki oferują kredyty R na sfinansowanie reszty inwestycji, które są kolejno akceptowane lub nie przez przedsiębiorców. Jak równowagowy poziom x zależy od małych zmian parametrów modelu.

(iii) Porównaj wypłaty przedsiębiorców w obu modelach.

Zadanie 4.9 *Rozpatrz model rynku ubezpieczeń. Są dwa rodzaje klientów: ryzykanci i asekuranci. Każdy rozpoczyna z majątkiem w, ale ma możliwość stracenia ℓ w wyniki pożaru. Prawdopodobieństwo pożaru wynosi p_L i p_H, odpowiednio dla asekurantów i ryzykantów. Zakładamy, że $1 > p_H > p_L > 0$. Oba typy klientów maksymalizują oczekiwaną użyteczność, gdzie użyteczność z majtku jest zadana funkcją u, $u'(\cdot) > 0$, oraz $u''(\cdot) < 0$. Na rynku są dwie firmy ubezpieczeniowe. Polisa ubezpieczeniowa polega na zapewnieniu wypłaty R w przypadku pożaru. Koszty polisy (składkę) oznaczamy przez m. Załóż, że klienci mogą kupić tylko jedną polisę.*

(i) Uargumentuj, że polisę można analizować, jako specyfikującą majątek dla dwóch stanów przyrody (pożar, brak pożaru).

(ii) Załóż, że firmy ubezpieczeniowe symultanicznie oferują polisy klientom i każda firma może zaoferować skończoną liczbę możliwych polis (tj. par (R, m)), jak w modelu screeningu. *Znajdź SPNE.*

(iii) Czy SPNE zawsze istnieje?

Zadanie 4.10 *Połowa absolwentów uczelni jest utalentowana i może produkować x. Druga połowa jest nieutalentowana i może wyprodukować 0. Przedstawiciele obu grup mają koszt alternatywny równy 1 i cechują się neutralnym stosunkiem do ryzyka. Pracodawca, po koszcie 2 dla niego i 1 dla aplikanta może przeprowadzić test wskazujący prawdziwą produktywność absolwenta. Pracodawcy konkurują o pracowników, ale ujawniają sobie nawzajem wyniki testów. To znaczy, że pracodawca wie czy kandydat był już testowany i czy zdał. Praca trwa przez jeden okres. Pracodawca nie może się zobowiązać do przetestowania każdego aplikanta, ani też do żadnej z góry ustalonej proporcji kandydatów.*

(i) *Dlaczego nie ma równowagi PBE, w której pracodawca testuje każdego kandydata, ani w której nieutalentowani kandydaci nie aplikują?*

(ii) *W równowadze, pracodawca testuje kandydatów z prawdopodobieństwem γ i płaci tym, którzy przejdą testy w. Utalentowani aplikują, a nieutalentowani aplikują z prawdopodobieństwem α. Znajdź wzór na równowagowe prawdopodobieństwo α będącego funkcją w. Wyjaśnij dlaczego α nie jest bezpośrednio funkcją x, mimo że pracodawcy zależy na wyższym x.*

(iii) *dla $x = 9$, jakie są równowagowe wartości α, γ oraz w?*

Zadanie 4.11 (Farber (1980)) *Jest trzech graczy: zarząd ($i = 1$), związek zawodowy ($i = 2$) i arbitrażysta ($i = 3$). Arbitrażysta musi wybrać rozstrzygnięcie konfliktu $t \in \mathbb{R}$ z pomiędzy dwóch ofert zaproponowanych przez zarząd $s_1 \in \mathbb{R}$ i związek zawodowy $s_2 \in \mathbb{R}$. Preferencje arbitrażysty są określone przez $v_0 = -(t - s_0)^2$. Tym samym wybiera on opcję najbliższą rozwiązania s_0, które jest przez niego uznawane za właściwe.*

Zarząd i związkowcy nie znają s_0, jednak wiedzą, że jest ono losowane z rozkładu prawdopodobieństwa o dystrybuancie P i gęstości p na przedziale $[\underline{s}_0, \bar{s}_0]$. Zarząd i związkowcy wybierają swoje oferty jednocześnie, przy czym ich preferencje są określone odpowiednio przez $u_1 = -t$ oraz $u_2 = +t$.

Wyprowadź i zinterpretuj warunki pierwszego rzędu na równowag Nasha w strategiach czystych. Pokaż, że w równowadze arbitrażysta z równą szansą wybierze ofert każdego z graczy.

Zadanie 4.12 (Myerson (1991)) *Rozpatrz aukcję najwyższej ceny, w której bierze udział dwóch graczy z niezależnymi prywatnie obserwowanymi waluacjami licytowanego dobra. Przed aukcją, każdy gracz i obserwuje zmienną losową t_i, losowaną niezależnie z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$. Wówczas, wartość przedmiotu dla gracza i wynosi $v_i = t_i + 0.5$.*

Następnie, każdy z graczy przedstawia swoją ofertę $b_i \geqslant 0$, przy wypłacie o postaci,

$$u_i(b_1, b_2, t_1, t_2) = \begin{cases} (t_i + 0.5) - b_i & jeli \quad b_i > b_{-i}, \\ 0 & jeli \quad b_i < b_{-i}, \\ \frac{1}{2}(t_i - b_i + 0.5) & jeli \quad b_i = b_{-i}. \end{cases}$$

Znajdź równowagę, w której każdy z licytujących wykorzystuje strategię o postaci $b_i = \alpha t_i + \beta$. Jaka jest oczekiwana wypłata w tej równowadze dla gracza i, który przed aukcją wylosował typ t_i?

Zadanie 4.13 (Myerson (1991)) *Ponownie rozpatrz aukcję jak w zadaniu 4.12, ale tym razem niech gracze mają wspólną waluację licytowanego dobra. Tak jak w zadaniu 4.12 przed licytacją każdy z graczy i $(i = 1, 2)$ obserwuje losową zmienną t_i losowaną niezależnie z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, 1]$, ale tym razem wartość licytowanego dobra wynosi $v = t_1 + t_2$. Oznacza to, że znając swoją zmienną t_i, oczekiwana wypłata gracza i wynosi $t_i = 0.5$, jak w poprzednim zadaniu. Każdy z graczy przedstawia swoją ofert $b_i \geqslant 0$, przy wypłacie o postaci,*

$$u_i(b_1, b_2, t_1, t_2) = \begin{cases} (t_i + t_{-i}) - b_i & jeli \quad b_i > b_{-i}, \\ 0 & jeli \quad b_i < b_{-i}, \\ \frac{1}{2}(t_i + t_{-i} - b_i) & jeli \quad b_i = b_{-i}. \end{cases}$$

Znajdź równowagę, w której każdy z licytujących wykorzystuje strategię o postaci $b_i = \alpha t_i + \beta$. Jaka jest oczekiwana wypłata w tej równowadze dla gracza i, który przed aukcją wylosował typ t_i? Pokaż, że dla dowolnej wartości t_i równowagowa oferta jest niższa niż w grze w zadaniu 4.12.

Zadanie 4.14 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Sprzedający i kupiec biorą udział w negocjacjach. Sprzedawca posiada przedmiot, który jest warty v dla kupca (waulacja sprzedawcy jest znormalizowana do zera). v jest znane kupcowi, ale nie jest znane sprzedawcy. Rozkład waluacji jest jednak znany wszystkim. Negocjacje są rozłożone na dwa etapy. Na początku każdego z nich sprzedawca prezentuje kupcowi ofertę* take-it-or-leave-it *(podając cenę dobra), którą kupiec może przyjąć lub odrzucić. Gra się kończy wraz z przyjęciem oferty przez kupca, lub wraz z końcem drugiego etapu, w zależności od tego co wydarzy się pierwsze. Każdy z graczy dyskontuje wypłatę z okresu drugiego czynnikiem δ.*

Na potrzeby zadania załóż, że jeśli kupiec jest obojętny wobec przyjęcia i odrzucenia oferty, to ją zawsze przyjmuje.

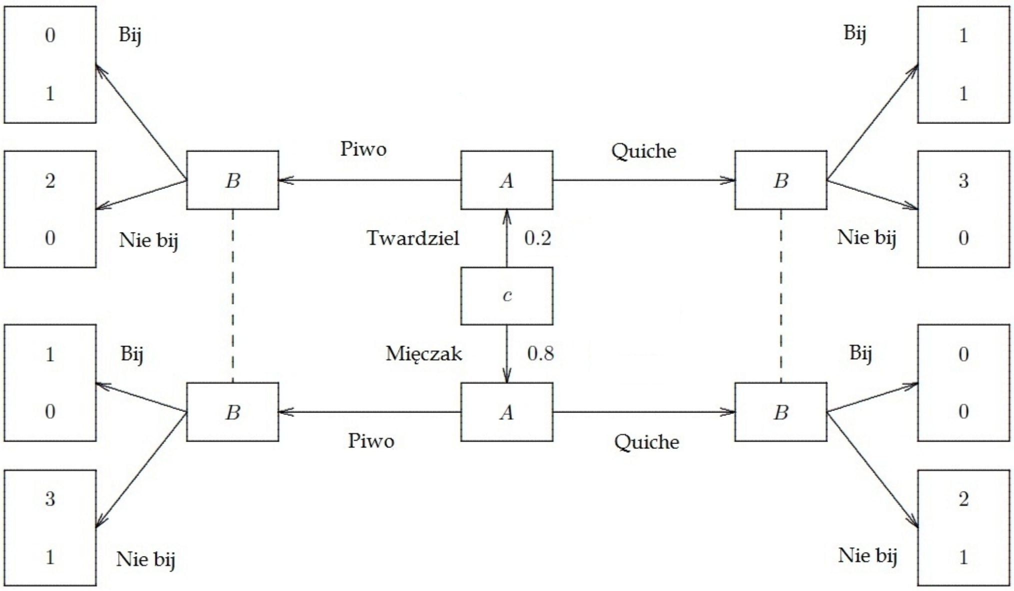
(i) *Scharakteryzuj WPBE gry (w strategiach czystych), dla przypadku gdy v przyjmuje dwie wartości: v_H, v_L, $v_H > v_L$, gdzie $\lambda = Prob(v_H)$.*

(ii) *Rozpatrz grę dla przypadku gdy v jest losowane z rozkładu jednostajnego na przedziale $[\underline{v}, \bar{v}]$.*

Zadanie 4.15 (Gra w *Piwo czy Quiche?*) *Dwóch studentów SGH poszło do pubu. Jeden z nich jest twardzielem, lubiącym od czasu do czasu przyłożyć jakiemu mięczakowi, jednak unikającym walki z innymi twardzielami. Drugi jest mięczakiem, który najchętniej unikałby jakiejkolwiek konfrontacji z kimkolwiek. Żaden ze studentów nie wie, czy drugi jest mięczakiem, czy twardzielem, ale każdy z nich wie, że z szansą 0.8 drugi jest twardzielem.*

Dodatkowo, każdy z graczy obserwuje zamówienie drugiego przy barze. Student może zamówić albo piwo, albo quiche. Jak wiadomo, prawdziwi twardziele zawsze piją piwo, podczas gdy mięczaki preferują quiche. Drugi student najchętniej wybrałby to co lubi najbardziej, jednak chciałby również uniknąć niepotrzebnej bijatyki.

Rozpatrz następującą grę z dwoma graczami. Natura decyduje, czy gracz A jest mięczakiem czy twardzielem z prawdopodobieństwem odpowiednio 0.8 i 0.2. Następnie gracz A, znając swój typ decyduje co zamówić (piwo czy quiche). Wreszcie decyzję (bić lub nie bić) podejmuje gracz B. Wypłaty gry zaprezentowano na rysunku



(i) *Jakie są równowagi bayesowskie powyższej gry? Czy wszystkie są słabymi doskonałymi równowagami bayesowskimi?*

(ii) Podaj równowagi separujce i pooling.

Zadanie 4.16 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Pani P., powódka, wniosła sprawę przeciwko Pani D. (pozwanej). Jeśli Pani P. wygra sprawę, otrzyma π dolarów odszkodowania za szkody spowodowane przez Panią D. Pani D. zna prawdopodobieństwo wygranej przez Panią P., równą $\lambda \in [0, 1]$, ale Pani P. go nie zna (Pani D. może wiedzieć, czy rzeczywiście jest winna, czy nie). Obydwie Panie mają ściśle dodatnie koszty udziału w procesie, odpowiednio c_p i c_d. Pierwotny rozkład prawdopodobieństwa parametru λ jest opisany przez $f(\lambda)$ (jest on powszechną wiedzą).*

Przed rozpoczęciem sprawy w sądzie, Panie mogą rozwiązać sprawę polubownie. Negocjacje wyglądają w następujący sposób. Pani P. prezentuje Pani D. ofertę take-it-or-leave-it *(w dolarach). Jeśli Pani D. się zgodzi na propozycję, wypłaca odszkodowanie Pani P. i gra się kończy. Jeśli nie, sprawa trafia do sądu.*

(i) Jakie są WPBE (w strategiach czystych) powyższej gry?

(ii) Jak parametry modelu (c_p, c_d, π) wpływają na równowagi gry?

(iii) Załóżmy teraz, że Pani P. może dodatkowo zrezygnować z pozwu po tym jak jej oferta zostanie odrzucona. Jakie wówczas będą WPBE? Jak będą one uzależnione od parametrów gry?

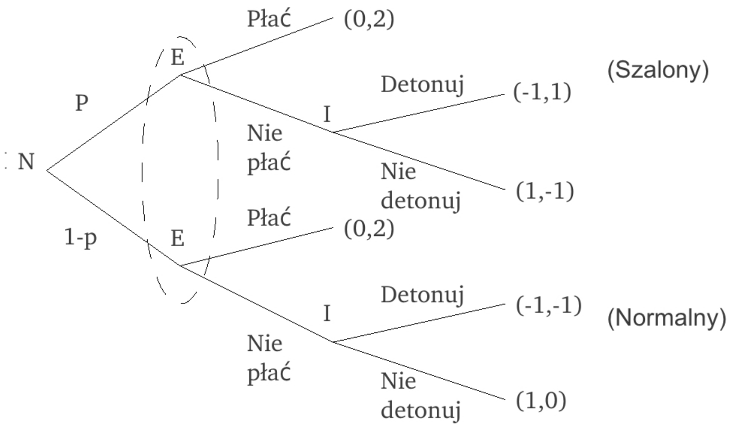
Zadanie 4.17 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrz symultaniczną aukcję pierwszej ceny jak w zadaniu 1.16, ale tym razem załóż, że waluacja v_i jest obserwowalna jedynie dla gracza i. Waluacja jest losowana z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, \bar{v}]$ dla każdego gracza.*

(i) Wyprowadź symetryczną bayesowską równowagę Nasha w strategiach czystych. [Podpowiedź: poszukaj równowagi, w której oferty składane przez gracza i są liniową funkcję jego waluacji w_i.]

(ii) Oznaczmy liczbę graczy przez I. Jak zmieniają się strategie graczy w równowadze, gdy I rośnie?

Zadanie 4.18 (Gra z terrorystą) *W naturze występują dwa typy terrorystów: normalni i szaleni. Z pośród wszystkich terrorystów, udział normalnych wynosi p, zaś szalonych $(1 - p)$. Normalny terrorysta nie lubi się detonować, natomiast lubi, gdy ofiary realizują jego żądania. Szaleni terroryści lubią się detonować do tego stopnia, że sprawia im to nawet większą przyjemność, niż realizacja żądań przez ofiary.*

Gra wygląda następująco. Terrorysta (I) kolejno puka do drzwi ofiary (E). Gdy tamta mu otworzy, terrorysta żąda od ofiary zapłacenia okupu. Jeśli ofiara zapłaci, uchodzi z życiem, jeśli nie, terrorysta podejmuje decyzję czy się zdetonować czy nie. Ekstensywną postać gry zaprezentowano poniżej. Zakładając, że ofiara nie zna typu terrorysty w którym ma do czynienia, ale



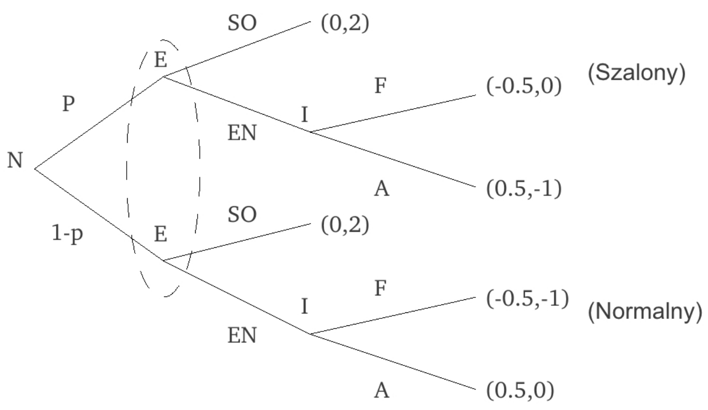
zna ich rozkład w populacji i obserwowała wcześniejszą wizytę terrorysty w innym domu, znajdź słabe równowagi bayesowskie podanej gry. Określ równowagę dla $p = \frac{3}{4}$*. (Zakładamy, że terrorysta który się zdetonował, może dalej odwiedać ofiary.)*

Zadanie 4.19 (Chain-store paradox) *Firma sieciowa (I) kolejno konkuruje z nowo wchodzącymi firmami (E) na odrębnych rynkach. Każda z wchodzących firm może zadecydować o wejściu (EN) lub o pozostaniu poza rynkiem. Gdy ta już podejmie decyzję, firma sieciowa może zarówno podjąć walkę z nową firmą (F) lub z niej zrezygnować (A).*

Rozpatrzmy przypadek firmy, która planuje wejść na rynek. Załóżmy, że nie nie zna ona typu firmy sieciowej, która działa już na rynku, jednak wie, że z szansą p trafi na firmę szaloną (agresywną), która zawsze preferuje walkę nad rezygnacją z niej, a z szansą $(1-p)$ *na firmę normalną (wypłaty zostały zaprezentowane poniżej).*

Zakładając, że firma wchodząca obserwowała wcześniejszą grę na innym rynku pomiędzy inną firmą a firmą sieciową, znajdź słabe równowagi bayesowskie podanej gry.

Zadanie 4.20 (Gra edukacyjna) *W gospodarce występują dwa typy graczy: wysoko utalentowani (oznaczeni typem* θ_H*) i nisko utalentowani (oznaczeni* θ_L*). Załóżmy* $\theta_H > \theta_L > 0$*, gdzie* θ_i *oznacza liczbę jednostek dobra konsumpcyjnego jaką dana jednostka jest w stanie wyprodukować w ciągu*



jednego okresu. Załóżmy dodatkowo, że udział osób utalentowanych w całej gospodarce wynosi $\lambda = Prob(\theta_i = \theta_H) \in (0, 1)$.

Dodatkowo na rynku występują dwie firmy, działające na zasadach doskonałej konkurencji. Każda firma dąży do maksymalizacji swojego zysku z produkcji dobra konsumpcyjnego, opłacając odpowiednio pracowników. Firma nie rozróżnia poszczególnych typów pracowników, jednak zna ich rozkład w gospodarce. Co więcej, obserwuje ona doskonale ich czas edukacji i może na tej podstawie warunkować wynagrodzenie $w(\cdot)$. *Zysk firmy można wówczas zaprezentować następująco,*

$$\pi = \lambda[p\theta_H - w(e_H)] + (1 - \lambda)[p\theta_L - w(e_L)],$$

gdzie p *określa cenę rynkową dobra konsumpcyjnego. Przyjmijmy dla uproszczenia, że* $p = 1$.

Aby zasygnalizować pracodawcom swoją efektywność, konsumenci mogą rozpocząć edukację, przy czym czas edukacji nie ma wpływu na efektywność pracownika, jest jedynie sygnałem. Niech e_i *określa czas edukacji podejmowany przez typ* i. *Koszt edukacji na poziomie* e *wynosi* $c(e|\theta_i)$, *dla danego typu* θ_i. *Wypłaty konsumentów przyjmują postać:*

$$u(e|\theta_i) = \begin{cases} w(e) - c(e|\theta_i) & gdy \quad w(e) \geqslant c(e|theta_i) \\ 0 & w.p.p. \end{cases}$$

Zakładamy $c(0, \theta_i) = 0, c_e > 0, c_{ee} > 0, c(\cdot|\theta_H) < c(\cdot|\theta_L), c_e(\cdot|\theta_H) < c_e(\cdot|\theta_L)$, *gdzie* c_e *określa pochodną funkcji* c *względem* e.

Gra wygląda następująco. Najpierw każdy z typów wybiera swój poziom edukacji. Następnie, nie znając typów, ale znając ich rozkład, firmy jednocześnie podejmują decyzję o wysokości wynagrodzenia w zależności od zaobserwowanego czasu edukacji. W końcu, konsument decyduje w której firmie przyjąć pracę, lub w ogóle z niej rezygnuje.

(i) Znajdź słabą równowagę bayesowską typu pooling w podanej grze;

(ii) Znajdź separującą słabą równowagę bayesowską w podanej grze

5 Projektowanie mechanizmów

Zadanie 5.1 (**Fudenberg i Tirole (2002)**) *Rozpatrz gospodarkę z I konsumentami określonymi za pomocą* quasi-liniowych *funkcji użyteczności,*

$$u_i(x, \theta_i, t_i) = v_i(x, \theta_i) + t_i,$$

gdzie t_i określa dochód gracza i, x publiczną decyzję (np.: dotyczącą podaży dobra publicznego), zaś $v_i(x, \theta_i)$ nadwyżką konsumenta i dla decyzji x i parametru preferencji θ_i. Parametr θ_i jest prywatną informacją każdego z graczy. Pieniężny koszt decyzji x wynosi $c(x)$.

Społecznie optymalną decyzją publiczną jest

$$x^*(\theta_1, \ldots, \theta_I) \in \arg\max_x \left\{ \sum_i v_i(x, \theta_i) - c(x) \right\}.$$

Załóż, że (i) maksymanta powyższego zadania jest ściśle wklęsła względem $(\theta_1, \ldots, \theta_I)$ oraz (ii) dla każdego $\theta_{-i}, \theta_i, \theta_i'$,

$$\theta_i' \neq \theta_i \Rightarrow x^*(\theta_{-i}, \theta_i') \neq x^*(\theta_{-i}, \theta_i),$$

a więc optymalna decyzja jest różnowartościowa względem poszczególnych parametrów.

Rozpatrz teraz następującą grę. Konsumenci jednocześnie ogłaszają swoje parametry preferencji. Tym samym czystą strategią gracza i jest jego komunikat $\hat{\theta}_i$ ($\hat{\theta}_i$ może być różne od θ_i). Realizowana decyzja $x^*(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_I)$ jest optymalna dla ogłoszonych parametrów. Każdy konsument otrzymuje wówczas transfer od społecznego planisty, równy

$$t_i(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_I) = k_i + \sum_{j \neq i} v_j(x^*(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_I), \hat{\theta}_j) - c(x^*(\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_I)),$$

gdzie k_i jest stałą. Pokaż, że mówienie prawdy jest zawsze strategią dominującą.

Ponieważ mówienie prawdy jest zawsze strategią dominującą, nie jest ważne czy gracze znają prawdziwe preferencje innych, ponieważ mówienie prawdy zawsze jest dla nich racjonalne. Ten schemat ujawniania preferencji za pomocą strategii dominujących (zwany mechanizmem Grovesa*) jest szczególnie interesujący, gdy parametr preferencji jest znany wyłącznie danemu konsumentowi.*

6 Gry kooperacyjne

Zadanie 6.1 *Rozpatrzmy grę kooperacyjną* (N, V)*, gdzie* $N = \{G, H, W\}$ *oraz* $V(\{G\}) = 1$*,* $V(\{H\}) = 2$*,* $V(\{W\}) = 3$*,* $V(\{G, H\}) = 8.2$*,* $V(\{G, W\}) = 6.5$*,* $V(\{H, W\}) = 8$*,* $V(\{G, H, W\}) = 11.2$*. Znajdź jądro (tj. rdzeń) tej gry. Przedstaw rdzeń graficznie.*

Zadanie 6.2 *Rozpatrzmy grę kooperacyjną* (N, V)*, gdzie* $N = \{A, B, C\}$ *oraz* $V(\{A\}) = V(\{B\}) = V(\{C\}) = 0$*,* $V(\{A, B\}) = 2$*,* $V(\{A, C\}) = 4$*,* $V(\{B, C\}) = 6$*,* $V(\{A, B, C\}) = 7$*. Oblicz wartość Shapleya dla każdego gracza.*

Zadanie 6.3 *Rozpatrz negocjacje w schemacie arbitrażowym Nasha pomiędzy związkami zawodowymi* (ZZ) *oraz pracodawcą* (PP)*.* PP *mają* 4 *propozycje: automatyzacja linii produkcyjnej* (A)*, likwidacja przerwy na kawę* (K)*,* A *i* K *łącznie lub pozostawienie* status quo (SQ)*.* ZZ *mają także* 4 *propozycje: podwyżka wynagrodzenia o dolara za godzinę* (P)*, zmiana pracowniczego programu emerytalnego* (E)*,* P *i* E *łącznie oraz pozostawienie* status quo (SQ)*. Wypłaty* PP *i* ZZ *opisuje tabela:*

	P	*E*	*SQ*	*K*	*A*
PP	*-3*	*-2*	*0*	*4*	*4*
ZZ	*3*	*2*	*0*	*-1*	*-2*

Wypłaty z łączonych propozycji są sumowane. Na wykresie przedstaw wypłaty z każdego możliwego wyniku negocjacji (kompromisu) i zakreśl zbiór negocjacyjny. Graficznie i analitycznie znajdź rozwiązanie arbitrażowe Nasha.

Zadanie 6.4 (Myerson (1991)) *Mary i John podejmują decyzją dotyczącą tego, w jaki sposób mają spędzić sobotni wieczór. Ograniczyli oni swój wybór do trzech opcji: obejrzeć galę boxu (B), pójść na balet (O), lub zostać w domu (D). Jeśli nie podejmą żadnej decyzji, zostają w domu (D stanowi tym samym status quo).*

Oprócz trzech powyżej wskazanych opcji, Mary i John mają dostęp do generatora liczb losowych, który umożliwia im dodatkowo wybór loterii, w której będą losowali rozwiązanie z wybranym przez siebie prawdopodobieństwem.

Mary najbardziej preferuje balet, przy czym jest obojętna pomiędzy obejrzeniem gali boxu, a pójściem na balet z szansą $\frac{1}{4}$ *i pozostaniem w domu z szansą* $\frac{3}{4}$*. John najbardziej preferuje box, zaś oglądanie baletu i pozostanie w domu dostarczają mu dokładnie taką samą użyteczność.*

(i) Zapisz formalnie zbiór użyteczności możliwych do osiągnięcia w negocjacjach pomiędzy Mary i Johnem. Naszkicuj następnie zbiór w przestrzeni dwu-wymiarowej.

(ii) Znajdź rozwiązanie arbitrażowe Nasha. Gdzie spędzą sobotę Mary i John?

(iii) Który aksjomat rozwiązania arbitrażowego Nasha pozwolił ci na określenie rozwiązania?

Załóżmy, że w domu Mary i Johna zepsuł się telewizor. Zdarzenie to nie wpłynie na preferencje Mary, jednak dla Johna istotnie obniży to użyteczność pozostania w domu. Załóżmy, że w przypadku braku telewizora, użyteczność pójścia na balet jest dla Johna równa użyteczności z pójścia na box z szansą $\frac{1}{3}$ *i pozostanie w domu z szansą* $\frac{2}{3}$.

(iv) Określ i naszkicuj nowy zbiór dostępnych użyteczności.

(v) Określ rozwiązanie arbitrażowe Nasha. Jak wynik zmienił się w stosunku do wcześniejszej sytuacji. Co było tego przyczyną? Zinterpretuj.

Zadanie 6.5 (Dopasowywanie rękawiczek) *Rozpatrzmy grę kooperacyjną z trzema graczami. Gracz* 1 *i* 2 *mają po jednej prawej rękawiczce. Gracz* 3 *ma jedną lewą. Koalicja, której uda się skompletować jedną parę dostaje wypłatę* 1*. W przeciwnym wypadku koalicja dostaje* 0.

Oznacza to, że wartości poszczególnych koalicji możemy zapisać następująco: $v(\{1,2,3\}) = 1, v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = 1, v(\{1,2\}) = 0, v(\{i\}) = 0$, $\forall i \in \{1,2,3\}$.

(i) Znajdź jądro gry.

(i) Określ wartość Shapleya każdego z graczy.

Zadanie 6.6 (Mas-Collel, Whinston i Greene (1995)) *Rozpatrzmy grę kooperacyjną pomiędzy czterema graczami* $\{1,2,3,4\}$. *Wartości poszczególnych koalicji mają postać:* $v(\{i\}) = 1$, $\forall i \in \{1,2,3,4\}$, $v(\{1,2\}) = v(\{3,4\}) = 0, v(\{1,3\}) = v(\{1,4\}) = v(\{2,3\}) = v(\{2,4\}) = 1$, $v(\{i,j,k\}) = 1$, $\forall i,j,k \in \{1,2,3,4\}$, $i \neq j \neq k$, $v(\{1,2,3,4\}) = 2$.

(i) Pokaż, że każde jadro gry przyjmuje postać $(\alpha, \alpha, 1-\alpha, 1-\alpha)$, $\alpha \in (0,1)$.

(ii) Znajdź wartość Shapleya dla każdego z graczy.

Załóżmy teraz, że $v(\{1,3,4\}) = 2$.

(iii) Pokaż, że w takiej sytuacji jadro gry jest jednoelementowe.

(iv) Znajdź wartość Shapleya dla każdego z graczy dla podanego wariantu gry.