

## Teoria realnego cyklu koniunkturalnego

### 1. Wprowadzenie

Jak relacjonuje Plosser (1989), lata 60-te ubiegłego wieku były okresem optymizmu wśród makroekonomistów. Nastrój ten bazował na dominującym wówczas paradygmacie keynesowskim. Zgodnie z nim, polityka gospodarcza, poprzez umiejętne wykorzystanie instrumentów monetarnych i fiskalnych, była w stanie kontrolować poziom zagregowanego popytu, a w konsekwencji neutralizować wpływ zaburzeń mogących prowadzić do wzrostu bezrobocia.

Lata 70-te, charakteryzujące się powrotem fluktuacji gospodarczych, bezrobocia i inflacji, nie pozostawiały złudzeń, że model keynesowski nie stanowi zadowalającego laboratorium do analizy skutków polityki gospodarczej. Głównego źródła jego niepowodzeń upatrywano w braku solidnych podstaw teoretycznych, bazujących na zdobyczach analizy mikroekonomicznej. Kluczowa w tym zakresie była tzw. krytyka Lucasa.<sup>1</sup> W swojej pracy z 1976 r. pokazał on na prostym przykładzie, że jeśli decyzje podmiotów ekonomicznych zależą od oczekiwań co do przyszłej polityki gospodarczej (a takie implikacje niesie ze sobą optymalizacja na poziomie mikro), wówczas tradycyjny model keynesowski, nie uwzględniający oczekiwań w sposób jawny, nie może dać prawidłowych odpowiedzi na skutki zmian tej polityki.

Skutki krytyki Lucasa okazały się rewolucyjne. Konstruowane modele makroekonomiczne coraz częściej bazowały w sposób jawny na zachowaniach podmiotów gospodarczych na poziomie mikro, które formowały swoje oczekiwania co do przyszłości w sposób racjonalny, czyli wykorzystujący całą dostępną dla nich (a więc niekoniecznie pełną) informację. Jak się okazało, taki sposób modelowania był dużo bardziej wymagający i wymagał istotnych modyfikacji stosowanych do tej pory narzędzi badawczych. Z czasem jednak wypracowano metody pozwalające na ilościową analizę (początkowo bardzo prostych) modeli równowagi ogólnej, w których podmioty gospodarcze dokonują dynamicznej

---

<sup>1</sup> Ważnym poprzednikiem był artykuł Friedmana (1968), krytykujący tradycyjną keynesowską, a więc abstrahującą od oczekiwań, krzywą Phillipsa.

optymalizacji w warunkach niepewności, czyli podejmują decyzje w oparciu o swoje racjonalne oczekiwania co do przyszłości.

Takie są korzenie szkoły realnego cyklu koniunkturalnego, za której początek powszechnie uznaje się artykuł Kydlanda i Prescottta (1982).<sup>2</sup> W rozpatrywanym przez nich modelu zachowanie się zmiennych makroekonomicznych jest wynikiem decyzji podejmowanych przez bardzo dużą liczbę gospodarstw domowych, maksymalizujących swoją użyteczność przy ograniczeniach zadanych przez technologię produkcji i posiadane zasoby. Taka formuła, poprzez swoje bezpośrednie nawiązanie do optymalizacji na poziomie mikro, posiada mocne fundamenty teoretyczne. Jako że ograniczenia technologiczne i zasobowe mają charakter obiektywny, natomiast preferencje zdeterminowane są przez stałe i niezależne od polityki gospodarczej cechy indywidualnych jednostek (czyli stanowią tzw. głębokie parametry gospodarki), ewentualna analiza jej skutków powinna być odporna na krytykę Lucasa.

Model realnego cyklu jest więc dynamicznym modelem równowagi ogólnej, pozbawionym wszelkich niedoskonałości rynkowych oraz kosztów dostosowań, a w konsekwencji generującym równowagę optymalną w sensie Pareto, czyniąc ewentualne próby wygładzania fluktuacji przez politykę gospodarczą działaniem niepożądanym. Jedynym źródłem niepewności w gospodarce są losowe zmiany produktywności, a więc zaburzenia o charakterze realnym.<sup>3</sup>

Zarysowany schemat jest oczywiście bardzo dużym i nierealistycznym uproszczeniem. Okazało się jednak, że nawet tak stylizowane narzędzie jest w stanie zaskakująco dobrze odwzorowywać podstawowe regularności we fluktuacjach agregatów makroekonomicznych. Odkrycie to było prawdziwym szokiem dla środowiska makroekonomicznych i odcisnęło trwałe piętno na współczesnym sposobie prowadzenia analiz makroekonomicznych. Rozwój badań opartych na schemacie analitycznym zaproponowanym przez szkołę realnego cyklu był bezprecedensowy. Nie wszystkie elementy podejścia Kydlanda i Prescottta (1982) znalazły powszechną akceptację. Wielu badaczy kontestuje dominującą rolę zaburzeń technologicznych, wprowadzając do modeli inne źródła losowości. Nie dla wszystkich przekonująca jest także stosowana przez ortodoksyjną szkołę realnego cyklu strategia kalibracji i oceny dopasowania modelu do danych. Niewątpliwym i chyba najważniejszym sukcesem tego nurtu jest jednak doprowadzenie do unifikacji warsztatu badawczego, wychodzącej poza granice tradycyjnych szkół ekonomicznych. Dynamiczne

---

<sup>2</sup> Za prekursorów tego nurtu należy uznać stochastyczny model wzrostu Brocka i Mirmana (1972).

<sup>3</sup> W przeciwieństwie do zaburzeń nominalnych, a więc wynikających np. z losowych zmian podaży pieniądza.

stochastyczne modele równowagi ogólnej (w skrócie DSGE) są obecnie głównym narzędziem badawczym tzw. szkoły neokeynesowskiej, która rozszerzyła standardowy model realnego cyklu o monopolistyczną konkurencję oraz sztywność zmiennych nominalnych (przede wszystkim cen), przywracając w ten sposób celowość polityki stabilizacyjnej.

## 2. Cykl koniunkturalny i jego typowe własności

Zanim przedstawimy standardowy model realnego cyklu koniunkturalnego i jego implikacje ilościowe, przyjrzymy się pewnym prawidłowościom obserwowanym w zachowaniu się podstawowych agregatów makroekonomicznych w cyklu oraz zdefiniujemy kilka pożytecznych pojęć.

Jak wiadomo, realny produkt per capita krajów rozwiniętych<sup>4</sup> od XIX w. wykazuje trwałą tendencję wzrostową. Prawidłowość tę ilustruje rysunek 1, na którym widać także, że długookresowy trend wzrostu gospodarczego następuje w tempie, które można uznać za w przybliżeniu stałe. Ścieżka PKB nie ewoluuje jednak w sposób gładki. Można zaobserwować okresy, w których znajduje się ona wyraźnie powyżej lub poniżej trendu przez wiele kwartałów. Jest tak zarówno jeśli odchylenia definiujemy względem trendu liniowego, jak i względem trendu wyznaczonego za pomocą filtru Hodricka-Prescotta (odtąd HP).<sup>5</sup>

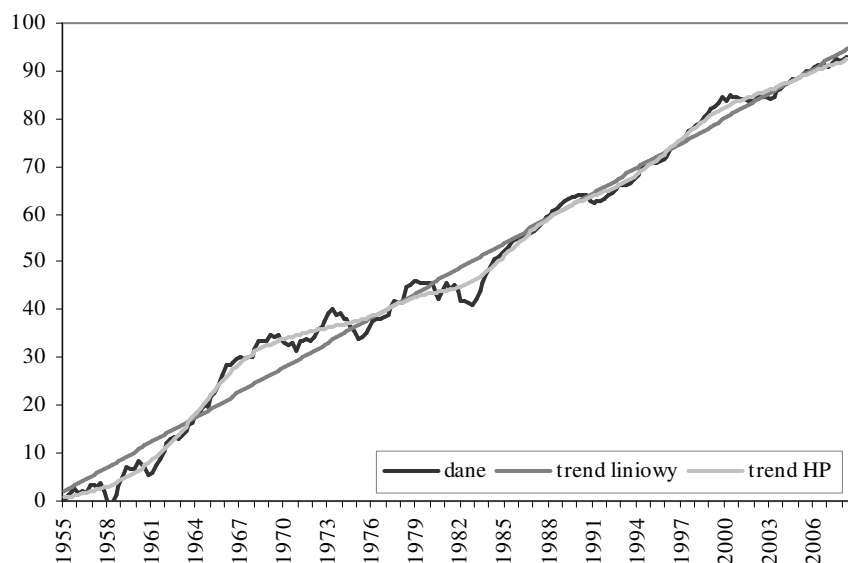
Wahania aktywności gospodarczej, mierzonej zazwyczaj przez PKB, wokół trendu nazywane są cyklem koniunkturalnym. Analizując rysunek 2 widać wyraźnie, że stosowane w ekonomii pojęcie cyklu różni się nieco od jego potocznego znaczenia. Cykle koniunkturalne nie muszą być (i nie są) ani regularne, ani (w pełni) przewidywalne. Wprawdzie po okresie podwyższonej aktywności gospodarczej zawsze przychodzi spowolnienie, czasem przyjmujące postać recesji, lecz nie odbywa się to w regularnych odstępach czasu, a amplituda wahań nie jest stała. Co istotne, fluktuacje dotyczą wszystkich głównych agregatów makroekonomicznych, nie tylko PKB.

---

<sup>4</sup> Zgodnie z tradycją szkoły realnego cyklu, podstawą analizy empirycznej prezentowanej w niniejszym rozdziale są dane dla gospodarki USA. Jest to jedyna na świecie rozwinięta gospodarka, dla której dostępne są relatywnie długie i spójne szeregi czasowe o częstotliwości kwartalnej i którą można traktować, ze względu na jej rozmiar, jako (w przybliżeniu) zamkniętą.

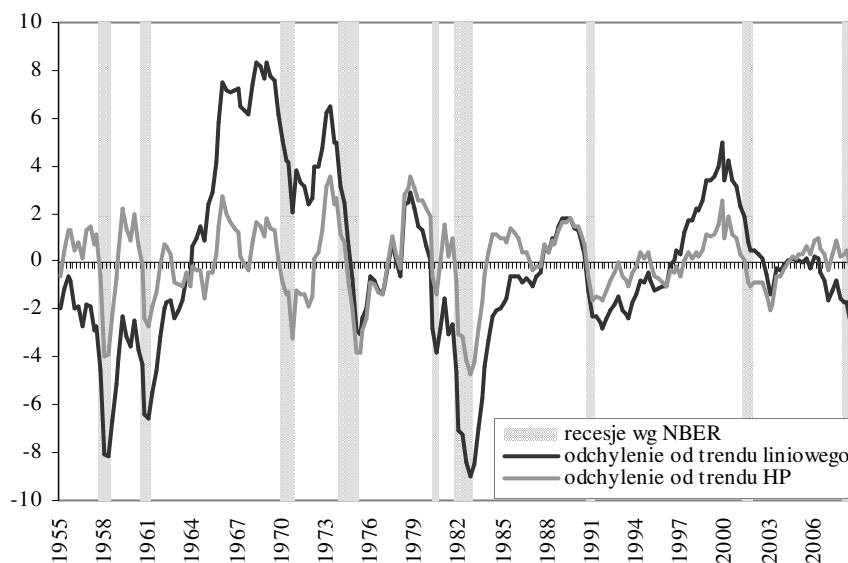
<sup>5</sup> Filtr HP, zaproponowany przez Hodricka i Prescottta w pracy z 1980 r. (opublikowanej w formie artykułu w 1997 r.), definiuje trend jako ruchomą średnią ważoną wszystkich (czyli przeszłych i przyszłych) obserwacji w próbie, przy czym wagi uzależnione są od tzw. parametru wygładzającego, którego standardową wartością dla zmiennych kwartalnych jest 1600. Gdy parametr ten zmierza do nieskończoności (zera), otrzymujemy zwykły trend liniowy (oryginalne dane). Jak widać na rysunku 1, standardowy filtr HP eliminuje nie tylko długookresowy, ale także średniookresowy trend w danych, akcentując więc bardziej wahania o relatywnie wysokich częstotliwościach. Więcej szczegółów na temat alternatywnych technik usuwania trendu można znaleźć u Canovy (2007).

**Rysunek 1. Ścieżka wzrostu realnego PKB per capita w USA**



Uwagi: szereg PKB jest wyrażony jako stukrotność logarytmu naturalnego i znormalizowany do zera dla I kw. 1955 r.

**Rysunek 2. Cykliczny komponent realnego PKB per capita w USA**



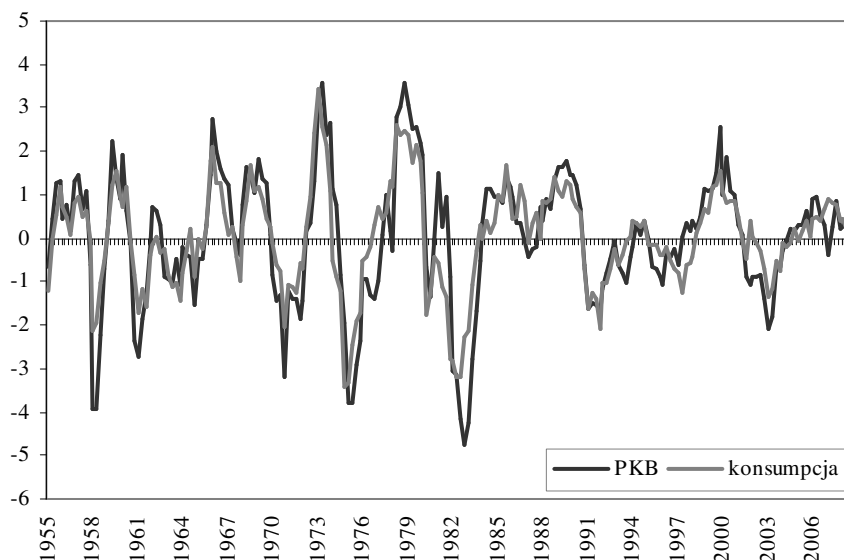
Uwagi: odchylenia od trendu wyrażono w procentach

W cyklicznym zachowaniu się podstawowych zmiennych makroekonomicznych można zauważyć kilka prawidłowości.<sup>6</sup> Przede wszystkim, charakteryzuje je silna inercyjność. W przypadku PKB oznacza to na przykład, że jeśli znajduje się on w danym momencie powyżej trendu, to z dużym prawdopodobieństwem pozostanie powyżej trendu

<sup>6</sup> Dalsza analiza w tej części opiera się na komponencie cyklicznym wyodrębnionym za pomocą filtra HP.

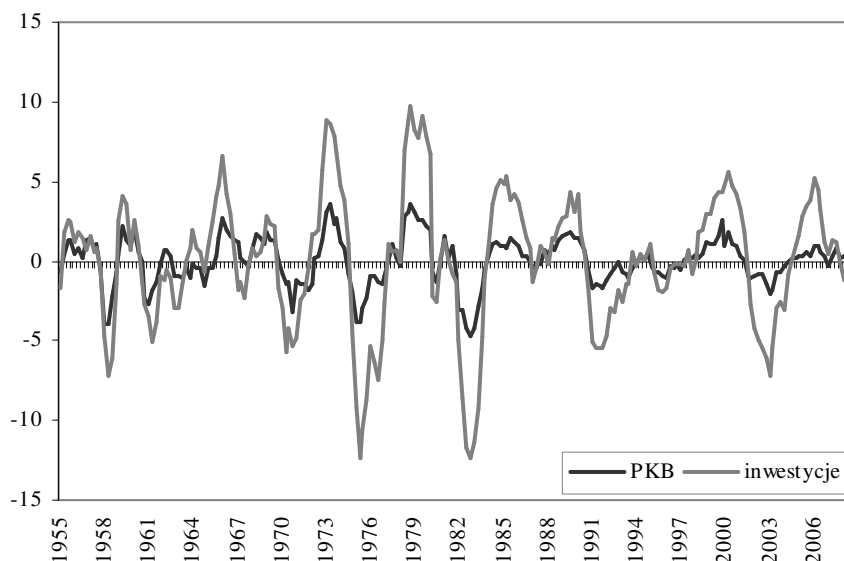
także w kolejnym okresie.<sup>7</sup> Jako miarę inercyjności szeregów czasowych wykorzystuje się często współczynnik korelacji pomiędzy daną zmienną a jej wartością w poprzednim okresie. W przypadku podstawowych agregatów makroekonomicznych, wartość tego współczynnika jest duża i wynosi 0,75-0,95.

**Rysunek 3. Cykliczny komponent PKB i konsumpcji w USA**



Uwagi: komponent cykliczny zdefiniowano jako procentowe odchylenie od trendu HP; zmienne wyjściowe wyrażono w ujęciu realnym i per capita

**Rysunek 4. Cykliczny komponent PKB i inwestycji w USA**

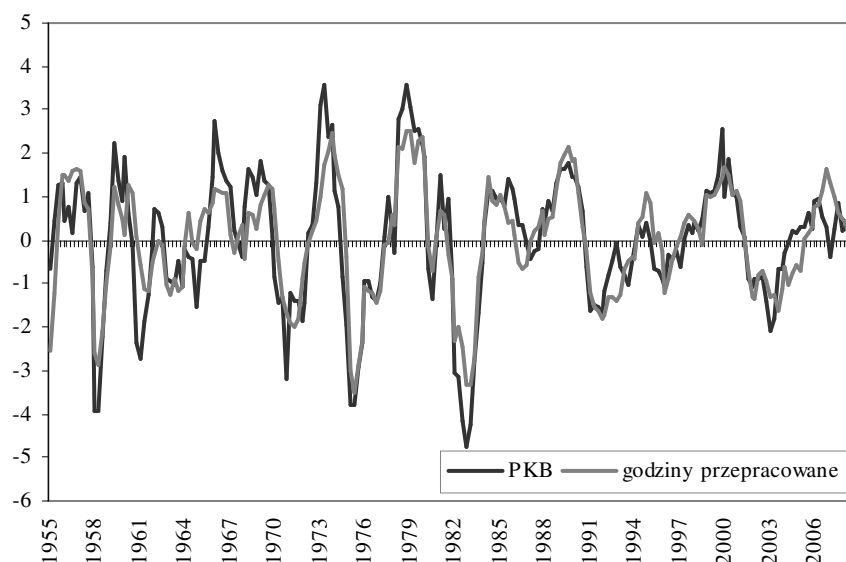


Uwagi: komponent cykliczny zdefiniowano jako procentowe odchylenie od trendu HP; zmienne wyjściowe wyrażono w ujęciu realnym i per capita

<sup>7</sup> W tym sensie cykle koniunkturalne są częściowo przewidywalne.

Po drugie, o ile wszystkie zmienne podlegają fluktuacjom, ich średnia amplituda nie jest taka sama. Jak widać na rysunku 3, wahania wydatków konsumpcyjnych gospodarstw domowych są na ogół słabsze niż wahania PKB.<sup>8</sup> Odwrotna sytuacja ma miejsce w przypadku wydatków inwestycyjnych (rysunek 4).

**Rysunek 5. Cykliczny komponent PKB i godzin pracowanych w USA**



Uwagi: komponent cykliczny zdefiniowano jako procentowe odchylenie od trendu HP; zmienne wyjściowe wyrażono w ujęciu realnym i per capita

Jeśli chodzi o czynniki produkcji, zdecydowanie większą zmiennością, prawie dorównującą zmienności produktu, charakteryzuje się nakład pracy (rysunek 5), znacznie bardziej stabilny jest natomiast zasób kapitału (rysunek 6).

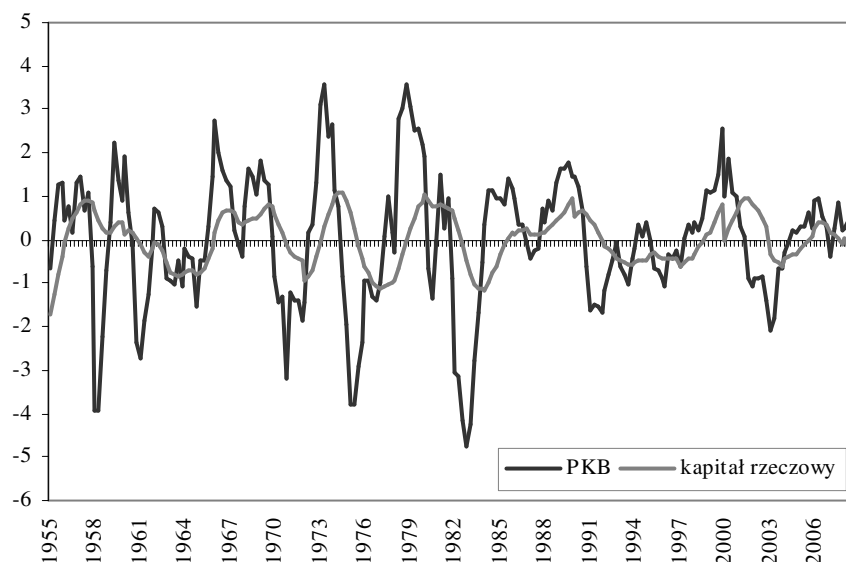
Wreszcie, w przypadku wahań większości zmiennych makroekonomicznych obserwujemy silne skorelowanie z cyklicznym komponentem PKB. W takim przypadku mówimy o procykliczności (jeśli współczynnik korelacji jest istotnie dodatni) lub antycykliczności (jeśli współczynnik korelacji jest istotnie ujemny) danej zmiennej. Przy braku istotnego skorelowania danej zmiennej z PKB mówić będziemy o jej acykliczności.

Na podstawie rysunków 3 do 6 można zaobserwować, że konsumpcja, inwestycje i nakład pracy są silnie procykliczne, zasób kapitału natomiast bardzo słabo procykliczny lub acykliczny. Widać także wyraźnie, że wahania tej ostatniej zmiennej są opóźnione względem

<sup>8</sup> Ta prawidłowość jest widoczna szczególnie wyraźnie jeśli z wydatków konsumpcyjnych wyłączymy zakup dóbr trwałego użytku, których zachowanie w cyklu jest bardziej zbliżone do inwestycji.

cyklu PKB, co nie powinno dziwić wobec silnej procykliczności inwestycji i opóźnionego ich przełożenia się na zmianę zasobu kapitału fizycznego.

**Rysunek 6. Cykliczny komponent PKB i kapitału fizycznego w USA**



Uwagi: komponent cykliczny zdefiniowano jako procentowe odchylenie od trendu HP;  
zmienne wyjściowe wyrażono w ujęciu realnym i per capita

Przedstawiona powyżej prosta analiza typowego zachowania się podstawowych zmiennych makroekonomicznych stanowi główną przesłankę oceny adekwatności konstruowanych modeli cyklu. Ograniczenie się do tego typu kryteriów jest szczególnie charakterystyczne dla szkoły realnego cyklu i stanowiło jedną z głównych linii krytyki jej oponentów.

### 3. Podstawowy model

#### 3.1. Założenia i struktura modelu

Zrębem standardowego modelu realnego cyklu koniunkturalnego jest neoklasyczny model wzrostu,<sup>9</sup> wywodzący się z prac Solowa (1956) i Swana (1956), rozszerzony przez Cassa (1965) i Koopmansa (1965) w oparciu o pionierski artykuł Ramsey'a (1928).<sup>10</sup> Typowa analiza wzrostu gospodarczego, koncentrująca się na długim okresie, przyjmuje zwykle

<sup>9</sup> Model realnego cyklu integruje więc analizę wzrostu i cyklu w ramach jednego, spójnego aparatu badawczego.

<sup>10</sup> Szczegółową prezentację neoklasycznego modelu wzrostu można znaleźć u Barro i Sala-I-Martin (2004, rozdz. 1 i 2). Nieco mniej formalne omówienie oferuje Romer (2000, rozdz. 1 i 2A).

upraszczające założenie o stałości (lub stałym tempie wzrostu) podaży pracy oraz deterministycznym charakterze postępu technicznego. W modelu realnego cyklu koniunkturalnego podaż pracy jest zmienną endogeniczną (tzn. wyjaśniana jest wewnątrz modelu), aczkolwiek jej długookresowy poziom jest stały (model abstrahuje więc od wzrostu populacji), a postęp techniczny zawiera komponent losowy. Taka konstrukcja jest zgodna z typowymi faktami przedstawionymi w poprzednim rozdziale, gdzie pokazaliśmy, że nakład pracy i produkt wykazują duże wahania cykliczne. Szczegółowa struktura przedstawionego poniżej modelu czerpie głównie z pracy Kinga i Rebelo (1999).

Nasza modelowa gospodarka zamieszkała jest przez kontinuum (bardzo dużą liczbę) identycznych i nieskończenie długo żyjących<sup>11</sup> gospodarstw domowych, których użyteczność zadana jest wzorem:

$$E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j U(C_{t+j}, L_{t+j}) \right\} \quad (3.1)$$

gdzie  $E_t$  jest operatorem oczekiwań bazujących na informacji dostępnej w chwili  $t$ ,  $0 < \beta < 1$  jest czynnikiem dyskontującym, natomiast  $u$  jest funkcją chwilowej użyteczności, zależącej dodatnio od konsumpcji  $C_t$  oraz czasu wolnego  $L_t$ .

Dalej będziemy zakładać, że funkcja chwilowej użyteczności przyjmuje następującą logarytmiczną postać:<sup>12</sup>

$$U(C_t, L_t) = \ln C_t + \theta \ln L_t \quad (3.2)$$

gdzie  $\theta > 0$  jest parametrem mierzącym względną wagę konsumpcji i czasu wolnego. Funkcja ta jest rosnąca i wklęsła. Oznacza to, że w opis preferencji gospodarstw domowych wbudowany jest motyw wygładzania konsumpcji i czasu wolnego.<sup>13</sup>

W każdym okresie gospodarstwa domowe dysponują pewnym zasobem czasu, który mogą przeznaczyć na pracę lub czas wolny. Oznaczając czas poświęcony pracy przez  $N_t$  i normalizując całkowity zasób czasu do jedności, otrzymujemy następujące ograniczenie:

$$L_t + N_t = 1 \quad (3.3)$$

Każde gospodarstwo domowe ma dostęp do technologii produkcji, pozwalającej łączyć nakład pracy  $N_t$  i kapitału  $K_t$  w celu wytworzenia finalnego produktu  $Y_t$ :

<sup>11</sup> Celem założenia o nieskończonym horyzoncie planowania gospodarstw domowych jest uproszczenie analizy, co ma znaczenie zwłaszcza przy analizie optymalnych polityk gospodarczych. Najczęściej przytaczanym uzasadnieniem tego założenia jest odwołanie się do transferów międzypokoleniowych.

<sup>12</sup> Jest to oczywiście szczególny przypadek bardziej ogólnej rodziny dopuszczalnych funkcji użyteczności, spójnych z istnieniem ścieżki zrównoważonego wzrostu. Por. King et al. (1988).

<sup>13</sup> Pod tym względem prezentowany model jest spójny z hipotezą dochodu permanentnego Friedmana (1957).



$$Y_t = A_t K_t^\alpha (X_t N_t)^{1-\alpha} \quad (3.4)$$

Zgodnie z powyższym wzorem, funkcja produkcji ma postać funkcji Cobba-Douglasa o stałych korzyściach skali.<sup>14</sup>

Postęp techniczny ma dwa komponenty: deterministyczny  $X_t$  oraz losowy  $A_t$ . Pierwszy z nich odpowiada długookresowemu trendowi wzrostu produktywności i zadany jest wzorem:

$$X_t = (1 + \gamma)X_{t-1} \quad (3.5)$$

gdzie  $\gamma$  jest stałym proporcjonalnym tempem wzrostu. Drugi komponent zdefiniowany jest jako następujący proces stochastyczny:

$$\ln A_t = \rho \ln A_{t-1} + \varepsilon_t \quad (3.6)$$

Losowy składnik produktywności  $A_t$  zadany jest więc przez proces autoregresyjny pierwszego rzędu, z parametrem autoregresyjnym  $\rho$  oraz losowym zaburzeniem  $\varepsilon_t$  o stałej wariancji  $\sigma^2$ .

Wytworzony produkt może być wykorzystane na cele konsumpcyjne lub inwestycyjne:

$$Y_t = C_t + I_t \quad (3.7)$$

Inwestycje  $I_t$  służą do akumulacji kapitału zgodnie ze standardowym równaniem:

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t \quad (3.8)$$

gdzie  $\delta$  oznacza stałą stopę deprecjacji.

### 3.2. Stan stacjonarny

Podobnie jak neoklasyczny model wzrostu (np. Solowa lub Ramseya), model realnego cyklu koniunkturalnego posiada tzw. ścieżkę zrównoważonego wzrostu, którą można zdefiniować jako stan równowagi, jaką gospodarka osiąga w długim okresie po wygaśnięciu skutków wszelkich przejściowych wstrząsów technologicznych. Innymi słowy, ilekroć gospodarka zostanie wytrącona ze ścieżki zrównoważonego wzrostu (np. przez zaburzenie technologiczne  $\varepsilon_t$ ), ostatecznie ponownie się na niej znajdzie.

Na ścieżce zrównoważonego wzrostu wszystkie zmienne modelu są albo stałe, albo rosną w stałym tempie zadany przez długookresowy trend wzrostu produktywności. Do tej pierwszej grupy zmiennych zaliczamy np. nakład pracy  $N_t$  i czas wolny  $L_t$ , do drugiej natomiast produkt  $Y_t$ , jego składowe  $C_t$  i  $I_t$  oraz zasób kapitału  $K_t$ .

---

<sup>14</sup> Dopuszczalne są także inne postacie funkcji produkcji, o ile spełniają następujące warunki (standardowe w neoklasycznym modelu wzrostu): stałe korzyści skali względem nakładu pracy i kapitału, dodatnie i malejące krańcowe produktywności pracy i kapitału, warunki Inady. Dodatkowo niestacjonarny komponent postępu technicznego musi mieć charakter pracooszczędny (dowód w Barro i Sala-I-Martin, 2004, rozdz. 1.5.3).

Analogicznie do neoklasycznego modelu wzrostu, dalszą analizę modelu realnego cyklu wygodnie jest prowadzić na jego stacjonarnej wersji. Otrzymujemy ją poprzez przeskalowanie wszystkich zmiennych wykazujących długookresowy wzrost przez niestacjonarny komponent produktywności  $X_t$ . Oznaczając tak przeskalowane zmienne małymi literami (np.  $y_t \equiv Y_t / X_t$ ), równania (3.2), (3.4), (3.7) oraz (3.8) ulegają odpowiednio następującym przekształceniom:

$$u(c_t, L_t) = \ln c_t + \theta \ln L_t \quad (3.9)$$

$$y_t = A_t k_t^\alpha N_t^{1-\alpha} \quad (3.10)$$

$$y_t = c_t + i_t \quad (3.11)$$

$$(1 + \gamma)k_{t+1} = (1 - \delta)k_t + i_t \quad (3.12)$$

W rezultacie otrzymujemy model, w którym wszystkie zmienne kształtują się w długim okresie na stałym, deterministycznie wyznaczonym poziomie (będącym funkcją tylko i wyłącznie parametrów modelu), w krótkim natomiast mogą wykazywać przejściowe od niego odchylenia.

### 3.3. Optymalny wybór

W każdym okresie  $t$  każde gospodarstwo domowe maksymalizuje swoją (przetransformowaną, zgodnie z regułą omówioną w sekcji 3.2) oczekiwaną użyteczność:

$$E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u(c_{t+j}, L_{t+j}) \right\} \quad (3.13)$$

przy ograniczeniach wyrażonych przez równania (3.3), (3.9), (3.10), (3.11) i (3.12), początkowy zasób kapitału  $k_t$  (który, jako rezultat przeszłych decyzji inwestycyjnych, jest w chwili  $t$  zadany) oraz tzw. warunek transwersalności.<sup>15</sup>

Warunki konieczne tak sformułowanego zagadnienia optymalizacyjnego można zapisać następującymi wzorami:

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t \quad (3.14)$$

$$\frac{\theta}{L_t} = (1 - \alpha) \lambda_t A_t k_t^\alpha N_t^{-\alpha} \quad (3.15)$$

$$(1 + \gamma) \lambda_t = \beta E_t \left\{ \lambda_{t+1} (\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + 1 - \delta) \right\} \quad (3.16)$$

gdzie  $\lambda_t$  jest krańcową użytecznością konsumpcji, zdefiniowaną przez wzór (3.14).

<sup>15</sup> Omówienie warunku transwersalności oraz formalne wyprowadzenie sformułowanych poniżej warunków koniecznych przedstawiono w załączniku A.1.

Zgodnie z warunkiem (3.15), korzyść wynikająca z zaangażowania dodatkowej jednostki pracy, czyli wyrażony w jednostkach użyteczności krańcowy produkt pracy (prawa strona równania) musi kompensować utratę użyteczności związaną ze zmniejszeniem czasu wolnego (lewa strona równania). Podobnie, koszt wyrzeczenia się konsumpcji związany z przeznaczaniem części bieżącego dochodu na akumulację kapitału (lewa strona równania (3.16)) powinien być równy zdyskontowanemu oczekiwanemu zwiększeniu możliwości konsumpcyjnych w kolejnym okresie, czyli wyrażonej w jednostkach użyteczności realnej stopie zwrotu (w ujęciu brutto, czyli powiększonej o 1) z kapitału, równej sumie niezdeprecjonowanej części kapitału i jego krańcowego produktu (prawa strona równania).

Obok endogenicznego nakładu pracy, kluczowym komponentem odróżniającym prezentowany model realnego cyklu od znanego z teorii wzrostu modelu Ramseya jest element niepewności, związany ze stochastycznym składnikiem postępu technicznego, reprezentowanym przez proces  $A_t$ . Zwróćmy uwagę, że w warunkach pewności (czyli gdy  $A_t$  jest stałe w każdym okresie, co ma miejsce gdy wariancja zaburzenia produktywności  $\sigma^2$  jest zerowa), rozwiązanie modelu jest czysto deterministyczne. Innymi słowy, maksymalizując oczekiwaną użyteczność zadaną wzorem (3.13) w chwili  $t$ , gospodarstwa domowe dokonują optymalnego wyboru zmiennych decyzyjnych nie tylko w bieżącym okresie, lecz są w stanie zaplanować całą ich przyszłą ścieżkę (od  $t$  do nieskończoności). Optymalizacja ma więc de facto miejsce tylko w chwili  $t$  i nie ma podstaw do jej weryfikacji w kolejnych okresach.

Gdy postęp techniczny ma charakter stochastyczny (lub, bardziej ogólnie, gdy w modelowanej gospodarce występują jakiegokolwiek zaburzenia losowe wpływające na decyzje podmiotów ekonomicznych), gospodarstwa domowe dokonują optymalizacji w każdym okresie, formułując oczekiwania co do kształtowania się produktywności, a w konsekwencji swoich decyzji, w przyszłości. Inna niż oczekiwana realizacja zaburzenia technologicznego sprawia, że poczynione w poprzednich okresach plany przestają być optymalne. W konsekwencji, dokonywana przez gospodarstwa domowe dynamiczna optymalizacja jest powtarzana w każdym kolejnym okresie.

Jak wspomniano na wstępie, kluczowym założeniem modeli realnego cyklu koniunkturalnego, odróżniającym je od tradycyjnego nurtu keynesowskiego, jest racjonalność oczekiwań. W naszym przypadku oznacza to, że gospodarstwa domowe formułują swoje oczekiwania mając pełną wiedzę o własnościach procesu stochastycznego opisującego kształtowanie się technologii, nie znając oczywiście przyszłych jego realizacji, wynikających z występowania zaburzeń losowych  $\varepsilon_t$ .

Sekwencja wydarzeń w modelu jest więc następująca. W chwili  $t$  gospodarstwa domowe, dysponujące zasobem kapitału  $k_t$  z poprzedniego okresu, obserwują realizację zaburzenia  $\varepsilon_t$  (a w konsekwencji  $A_t$ ), formułują racjonalne oczekiwania co do przyszłych poziomów produktywności i na ich podstawie dokonują wyboru alokacji czasu pomiędzy pracą i czas wolny, poziomu produkcji oraz jego rozdysponowania pomiędzy konsumpcję i inwestycje. Wszystkie te decyzje podejmowane są łącznie i biorą pod uwagę sformułowane powyżej ograniczenia opisujące strukturę gospodarki. Wybrany poziom inwestycji determinuje poziom kapitału w okresie  $t + 1$ , w którym faktycznie zrealizowany poziom produktywności  $A_{t+1}$  stanowi podstawę do ewentualnej weryfikacji oczekiwań na kolejne okresy itd.

Gospodarstwa domowe w opisanym modelu są identyczne a decyzje podejmowane przez jedno z nich nie mają wpływu na zachowanie pozostałych. Jak pokazał Debreu (1954), alokacje dokonywane w takim środowisku odpowiadają zdecentralizowanej równowadze ogólnej w doskonale konkurencyjnej gospodarce, w której kontinuum agentów działa na wspólnym rynku dóbr, pracy i kapitału. Rozwiązanie naszego modelu można więc interpretować jako alokacje per capita w takiej właśnie gospodarce. W modelu nie ma też żadnych niedoskonałości lub efektów zewnętrznych, ustalająca się w nim równowaga jest więc optymalna w sensie Pareto.<sup>16</sup>

Ta ostatnia cecha niesie ze sobą bardzo ważką implikację. W modelu realnego cyklu koniunkturalnego obserwowane fluktuacje zmiennych makroekonomicznych odzwierciedlają optymalne reakcje podmiotów gospodarczych na zaburzenia technologiczne. Angażowanie się państwa w politykę stabilizacyjną, mającą na celu wygładzanie tychże fluktuacji, jest więc (z punktu widzenia użyteczności gospodarstw domowych) nie tylko bezcelowe, lecz nawet szkodliwe.

### 3.4. Aproksymacja logarytmiczno-liniowa

Nasz model realnego cyklu koniunkturalnego składa się z siedmiu równań (czterech ograniczeń (3.3) i (3.10)-(3.12) oraz trzech warunków koniecznych (3.14)-(3.16)), opisujących kształtowanie się siedmiu zmiennych endogenicznych:  $y_t$ ,  $c_t$ ,  $i_t$ ,  $L_t$ ,  $N_t$ ,  $k_t$  i  $\lambda_t$ . Jedyną zmienną egzogeniczną modelu jest technologia  $A_t$ , zdefiniowana przez proces (3.6). Ze względu na nieliniowość oraz obecność oczekiwań, analityczne rozwiązanie tak utworzonego systemu równań nie jest na ogół możliwe przy wykorzystaniu standardowych

---

<sup>16</sup> Wniosek ten wynika wprost z pierwszego twierdzenia ekonomii dobrobytu.

metod.<sup>17</sup> Spośród dostępnych obecnie technik, w prostych analizach najczęściej stosowana jest tzw. aproksymacja logarytmiczno-liniowa.<sup>18</sup>

Metoda ta polega na sprowadzeniu równań do postaci, w której wszystkie zmienne modelu wyrażone są jako logarytmiczne (czyli, w przybliżeniu, procentowe) odchylenia od swoich wartości w stanie stacjonarnym. Tak przekształcone równania zapisuje się w postaci liniowej względem przekształconych zmiennych, wykorzystując rozwinięcie Taylora pierwszego rzędu wokół zera, czyli wokół stanu, w którym wszystkie zmienne modelu znajdują się na swoich poziomach zgodnych ze stanem stacjonarnym.<sup>19</sup> W wyniku tych transformacji, równania naszego modelu przyjmują następującą postać:<sup>20</sup>

$$L\hat{L}_t + N\hat{N}_t = 0 \quad (3.17)$$

$$\hat{y}_t = \hat{A}_t + \alpha\hat{k}_t + (1-\alpha)\hat{N}_t \quad (3.18)$$

$$\hat{y}_t = \frac{c}{y}\hat{c}_t + \frac{i}{y}\hat{i}_t \quad (3.19)$$

$$(1+\gamma)\hat{k}_{t+1} = (1-\delta)\hat{k}_t + \frac{i}{k}\hat{i}_t \quad (3.20)$$

$$\hat{c}_t + \hat{\lambda}_t = 0 \quad (3.21)$$

$$\hat{L}_t + \hat{\lambda}_t + \hat{A}_t + \alpha\hat{k}_t - \alpha\hat{N}_t = 0 \quad (3.22)$$

$$(1+\gamma)\hat{\lambda}_t = \beta E_t \left\{ \alpha A \left( \frac{k}{N} \right)^{\alpha-1} \left[ \hat{\lambda}_{t+1} + \hat{A}_{t+1} + (\alpha-1)\hat{k}_{t+1} + (1-\alpha)\hat{N}_{t+1} \right] + (1-\delta)\hat{\lambda}_{t+1} \right\} \quad (3.23)$$

gdzie zmienne bez subskrypty czasowego oznaczają wartości tych zmiennych w stanie stacjonarnym, natomiast zmienne z daszkiem oznaczają ich logarytmiczne odchylenia od stanu stacjonarnego (np.  $\hat{y}_t \equiv \ln y_t - \ln y$ ).

Rozwiązując model sprowadzony do postaci logarytmiczno-liniowej korzysta się z tzw. ekwiwalentu pewności, zastępując przyszłe realizacje zaburzeń losowych (a w konsekwencji wszystkich zmiennych modelu) ich warunkowymi (czyli bazującymi na

<sup>17</sup> Analityczne rozwiązanie dynamicznych stochastycznych modeli równowagi ogólnej jest możliwe tylko w szczególnych (i mało realistycznych) przypadkach. Przykładem jest model rozpatrywany przez Longa i Plossera (1983).

<sup>18</sup> Szczegółowe omówienie metod rozwiązywania modeli z oczekiwaniami można znaleźć u Hansena i Prescottta (1995) oraz Danthine i Donaldsona (1995).

<sup>19</sup> Warto zaznaczyć, że ułatwienia obliczeniowe związane z aproksymacją pierwszego rzędu osiągane są kosztem utraty możliwości badania niektórych potencjalnie interesujących zagadnień ekonomicznych, jak np. wpływ skali niepewności na decyzje podejmowane przez podmioty gospodarcze. Do analizy tego typu tematów konieczne są (bardziej wymagające obliczeniowo) aproksymacje wyższego rzędu.

<sup>20</sup> Ideę i podstawowe techniki wykorzystywane przy aproksymacji logarytmiczno-liniowej omówiono szczegółowo w załączniku A.2.

informacji dostępnej w momencie podejmowania decyzji) wartościami oczekiwanymi. Postać rozwiązania tak sformułowanego modelu jest znana i można ją zapisać następująco:

$$\hat{Z}_t = B_1 \hat{Z}_{t-1} + B_0 \hat{A}_t \quad (3.24)$$

gdzie  $\hat{Z}_t$  grupuje wszystkie zmienne endogeniczne modelu, natomiast  $B_0$  i  $B_1$  są macierzami zależnymi wyłącznie od współczynników występujących w równaniach (3.17)-(3.23), czyli od parametrów modelu (pamiętając, że tylko od nich zależą pojawiające się w równaniach wartości zmiennych w stanie stacjonarnym).<sup>21</sup>

Mając tak zapisaną postać rozwiązania modelu, można już w standardowy sposób (znany z literatury poświęconej analizie szeregów czasowych) badać jego implikacje ilościowe, w tym reakcje na zaburzenie technologiczne i regularności występujące pomiędzy głównymi zmiennymi makroekonomicznymi.

## 4. Implikacje ilościowe

### 4.1. Kalibracja modelu

Z dyskusji przedstawionej w poprzednim rozdziale wynika, że przed przystąpieniem do jakichkolwiek analiz ilościowych z wykorzystaniem naszego modelu konieczne jest przypisanie parametrom modelu konkretnych wartości. W tradycyjnym nurcie teorii realnego cyklu koniunkturalnego dokonuje się tego na drodze tzw. kalibracji. Metoda ta, zgodnie z rekomendacjami Lucasa (1980), polega na wnioskowaniu o wartości parametrów modelu na podstawie badań empirycznych na poziomie mikro oraz wiedzy o długookresowych charakterystykach gospodarki.<sup>22</sup>

W rozpatrywanym przez nas modelu musimy skalibrować siedem parametrów:  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$ ,  $\theta$ ,  $\rho$  i  $\sigma$ . Poniżej ilustrujemy standardową procedurę prowadzącą do wyznaczenia ich wartości, bazując na danych i badaniach dla gospodarki USA oraz przyjmując jako jednostkę czasu kwartał.

---

<sup>21</sup> Popularną metodą wyznaczania macierzy  $B_0$  i  $B_1$  jest metoda Blancharda i Kahna (1980). Szczegółowe omówienie tej i innych metod rozwiązywania liniowych modeli z oczekiwaniami można znaleźć u Uhliga (1999).

<sup>22</sup> Podejście takie budzi kontrowersje, zwłaszcza wśród zwolenników tradycyjnych metod ekonometrycznych. Obserwowany w ostatnich latach rozwój technik obliczeniowych sprawił, że estymacja niewielkich i średnich modeli z racjonalnymi oczekiwaniami nie przedstawia obecnie większych trudności. Szczegółowe omówienie metod ekonometrycznych wykorzystywanych w tego typu modelach można znaleźć u Canovy (2007). Przystępną dyskusję różnic pomiędzy podejściem kalibracyjnym a ekonometrycznym proponuje King (1995).

Standardowo przyjmowaną w literaturze wartością elastyczności produktu względem nakładu kapitału  $\alpha$  jest 0,33, co w przybliżeniu odpowiada średniemu udziałowi wynagrodzenia kapitału fizycznego w produkcji. Podobnie, dane empiryczne sugerują, że realistyczna kwartalna stopa zużycia kapitału  $\delta$  wynosi 0,025, czyli około 10% w skali roku. Średnie kwartalne tempo wzrostu PKB per capita<sup>23</sup> w latach 1955-2008 wynosiło w USA ok. 0.42%, na takim więc poziomie kalibrujemy też parametr  $\gamma$ .

Równanie (3.16) w stanie stacjonarnym implikuje następującą zależność:

$$\frac{1+\gamma}{\beta} - 1 = \alpha A \left( \frac{k}{N} \right)^{\alpha-1} - \delta \quad (3.25)$$

Jak już zauważyliśmy wcześniej omawiając wzór (3.16), lewa strona powyższego warunku może być interpretowana jako realna stopa zwrotu z kapitału (zapisana tym razem w ujęciu netto), która w równowadze musi być równa jego krańcowemu produktowi pomniejszonemu o deprecjację (prawa strona). Biorąc pod uwagę, że średnia kwartalna stopa zwrotu z indeksu Standard and Poor 500 w latach 1955-2008 wynosiła ok. 1,8%, realistycznym oszacowaniem dla parametru  $\beta$  jest 0,986.

Mając wyznaczone parametry  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i  $\delta$  oraz zauważając, że równanie (3.6) przy braku zaburzeń produktywności implikuje  $A$  równe jedności, warunek (3.25) można wykorzystać do wyznaczenia długookresowego technicznego uzbrojenia pracy ( $k / N$ ). Z równania (3.12) wynika, że stosunek inwestycji do zasobu kapitału ( $i / k$ ) w stanie stacjonarnym wynosi  $\gamma + \delta$ . Na mocy równania (3.10), długookresowy poziom kapitałochłonności produkcji ( $k / y$ ) jest funkcją technicznego uzbrojenia pracy. Przemnożenie jej przez ( $i / k$ ) daje nam długookresowy udział inwestycji w produkcji ( $i / y$ ). Dopełnienie go do jedności równe jest, zgodnie z równaniem (3.11), udziałowi konsumpcji w produkcji ( $c / y$ ).

Do oszacowania parametru  $\theta$  wykorzystamy równanie (3.15), które po przemnożeniu przez  $N$  oraz skorzystaniu z (3.3), (3.10) i (3.14) można zapisać w stanie stacjonarnym jako:

$$\frac{\theta N}{1-N} = (1-\alpha) \frac{y}{c} \quad (3.26)$$

Szacuje się, że przeciętne gospodarstwo domowe przeznaczają średnio ok. jedną piątą swojego czasu na pracę, co sugeruje długookresowy poziom  $N$  i  $L$  równy odpowiednio 0,2 i 0,8. Aby tak było, zgodnie z równaniem (3.26) i wcześniej dokonanymi założeniami i obliczeniami, parametr  $\theta$  musi być równy 3,44.

---

<sup>23</sup> Pamiętajmy, że rozpatrywany model abstrahuje od wzrostu populacji, właściwym odniesieniem dla niego są więc kategorie per capita.

W wyniku przeprowadzonych szacunków dysponujemy wartościami liczbowymi dla wszystkich współczynników równań (3.17)-(3.25). Ostatnim etapem kalibracji jest więc oszacowanie parametrów procesu stochastycznego opisującego kształtowanie się przejściowego komponentu produktywności  $\hat{A}_t$ , czyli  $\rho$  i  $\sigma$ . W tym celu można posłużyć się tzw. resztą Solowa, czyli empirycznym oszacowaniem tej części produktu, która nie jest wyjaśniona nakładami pracy i kapitału (por. Solow, 1957):

$$\ln SR_t^{obs} = \ln Y_t^{obs} - \alpha \ln K_t^{obs} - (1 - \alpha) \ln N_t^{obs} \quad (3.27)$$

Gdzie zmienne z subskrypcją *obs* oznaczają empiryczne obserwacje odpowiednich zmiennych modelowych, bazujące na danych statystycznych.<sup>24</sup>

Zgodnie z przyjętą funkcją produkcji (3.10), związek pomiędzy tak zdefiniowaną miarą postępu technicznego a procesem technologicznym w rozpatrywanym przez nas modelu wyraża się następującą formułą:

$$\ln SR_t = \ln A_t + (1 - \alpha) \ln X_t \quad (3.28)$$

Możemy więc wykorzystać empiryczne oszacowanie reszty Solowa do estymacji własności procesu kształtującego  $A_t$ . Zauważmy najpierw, że drugi składnik równania (3.28) tworzy, zgodnie z (3.5), zwykły trend liniowy. Usuwając go standardowymi technikami ekonometrycznymi otrzymujemy więc empiryczne oszacowanie  $\ln A_t$ , które można już wykorzystać bezpośrednio do estymacji parametrów procesu (3.6). Bazując na danych amerykańskich za okres 1955-2008, otrzymujemy  $\rho = 0,9758$  i  $\sigma = 0,00775$ .

#### 4.2. Rozwiązanie deterministyczne – zbieżność modelu

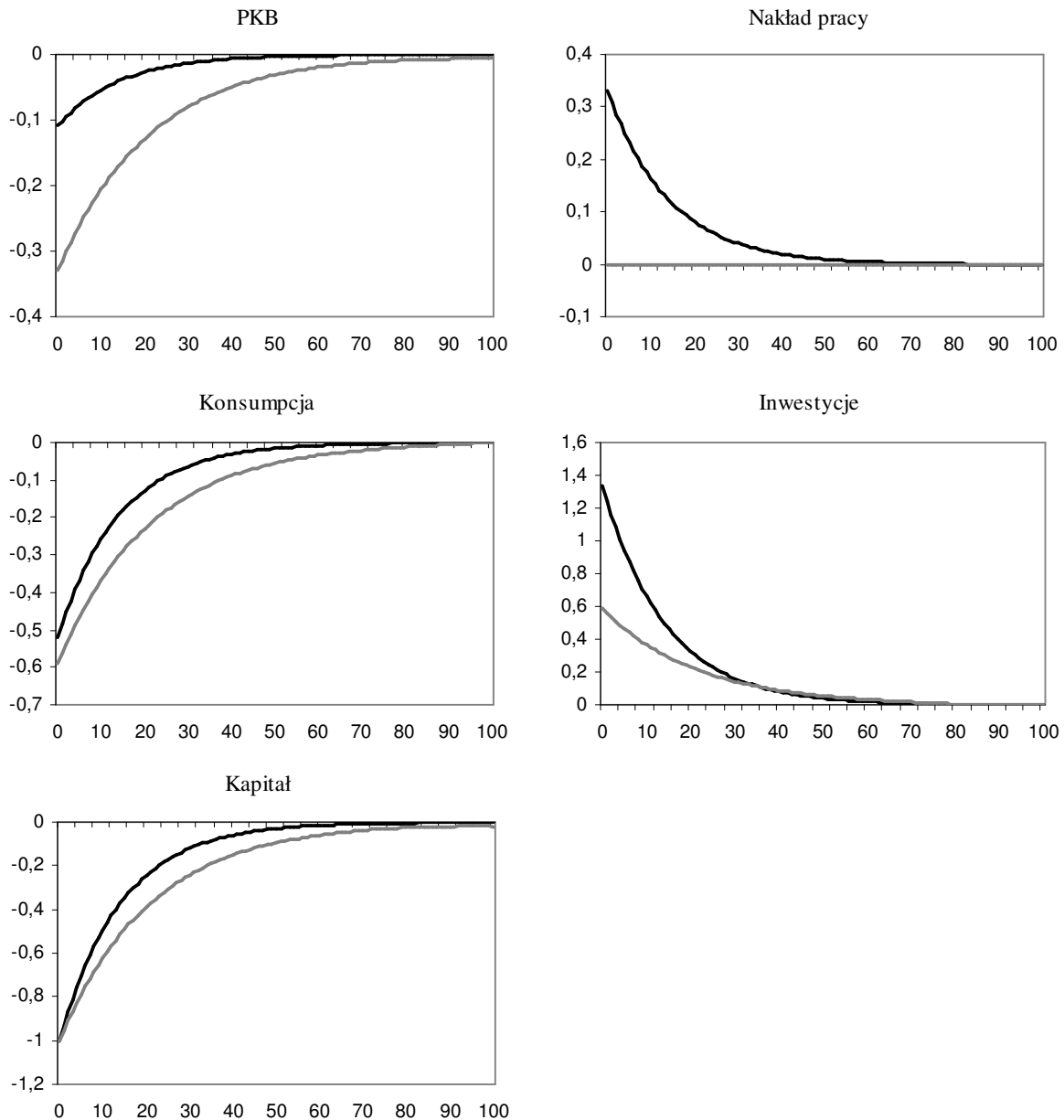
Jak już wspomniano, prezentowany w niniejszym opracowaniu prosty model realnego cyklu koniunkturalnego bazuje na standardowym neoklasycznym modelu wzrostu, różniąc się od niego endogenicznym nakładem pracy oraz stochastycznym charakterem zmian technologicznych. Przyjrzyjmy się najpierw temu pierwszemu elementowi. Aby ocenić wpływ możliwości zmian nakładu pracy na dynamikę modelu, rozważmy gospodarkę, której technologia ewoluuje w sposób deterministyczny (czyli  $A_t = 1$  w każdym okresie) i której początkowy poziom kapitału fizycznego jest o 1% poniżej stanu stacjonarnego.

<sup>24</sup> Oficjalne dane statystyczne nie zawierają szeregów kapitału fizycznego. Empiryczne oszacowanie tej kategorii narażone jest na wiele trudności i z konieczności zawsze opiera się na silnych założeniach i uproszczeniach. Ze względu na stylizowany charakter niniejszego opracowania, stosujemy w nim bardzo prostą metodę, wykorzystującą bezpośrednio formułę (3.8), oficjalne dane na temat inwestycji oraz przyjmującą początkowy zasób kapitału na poziomie 7,6 produktu, zgodnie ze stanem stacjonarnym naszego modelu.



Zgodnie ze standardowym modelem wzrostu, w którym nakład pracy jest zadany egzogenicznie, gospodarka taka będzie monotonicznie dochodzić do swojego stanu stacjonarnego poprzez stopniową akumulację kapitału. Zachowanie się głównych kategorii makroekonomicznych na tej ścieżce przedstawiono na rysunku 7 jasnoszarą linią.

**Rysunek 7. Zbieżność do stanu stacjonarnego**



Uwagi: czarna linia – model z endogeniczną podażą pracy, szara linia – model ze stałą podażą pracy; wszystkie zmienne wyrażono jako procentowe odchylenie od stanu stacjonarnego; jednostka czasu to jeden kwartał

Zgodnie z funkcją produkcji, jako że nakład pracy jest stały, wytwarzany produkt zachowuje się w podobny sposób jak nakład kapitału, czyli jego odchylenie od stanu stacjonarnego jest ujemne, lecz stopniowo się zmniejsza. Jak widać ze ścieżek obu

komponentów produktu, ta stopniowa akumulacja kapitału wymaga opóźnienia konsumpcji na rzecz inwestycji: przez cały okres zbieżności proporcjonalne odchylenie konsumpcji od stanu stacjonarnego jest większe niż w przypadku produktu, natomiast inwestycje kształtują się powyżej stanu długookresowej równowagi. Innymi słowy, gospodarstwa domowe dokonują tzw. międzyokresowej substytucji, czyli poświęcają część bieżących możliwości konsumpcyjnych na rzecz zwiększenia konsumpcji w przyszłości, co możliwe będzie dzięki większej produkcji, związanej z większym zasobem kapitału.

Analogiczny scenariusz w naszym modelu realnego cyklu koniunkturalnego, a więc dopuszczający możliwość decydowania przez gospodarstwa domowe o alokacji czasu pomiędzy pracą a odpoczynek, przedstawiono na tym samym rysunku czarną linią. Gdy poziom kapitału jest niski, optymalną decyzją okazuje się być zwiększenie nakładu pracy. Skutkuje to wprawdzie obniżeniem użyteczności związanej z czasem wolnym, efekt ten jest jednak z nawiązką skompensowany zwiększeniem konsumpcji. Wyższa konsumpcja jest możliwa dzięki wyższej produkcji, będącej wynikiem zwiększonego nakładu pracy, ale także przyspieszonej akumulacji kapitału.

Widzimy więc, że wprowadzenie zmiennego nakładu pracy do standardowego modelu wzrostu skutkuje zwiększeniem tempa zbieżności do stanu stacjonarnego, zmniejszeniem reakcji produktu i konsumpcji, natomiast zwiększeniem reakcji inwestycji.

### **4.3. Zaburzenie technologiczne**

Podstawową cechą wyróżniającą modele realnego cyklu na tle modeli wzrostu jest jednak stochastyczny charakter zmian technologicznych. To właśnie nieprzewidywalne zmiany produktywności powodują, że zmienne makroekonomiczne w naszej modelowej gospodarce nie będą zachowywały się tak gładko jak w deterministycznym przypadku omówionym powyżej, lecz podlegać będą nieregularnym wahaniom. W niniejszej części prześledzimy więc reakcję gospodarki na typowe tego rodzaju zaburzenie.

Zaczynamy od wariantu bazowego, opartego na naszym empirycznym oszacowaniu inercji procesu opisującego technologię ( $\rho = 0,9758$ ). Zachowanie się głównych kategorii makroekonomicznych w reakcji na niespodziewane jednorazowe zaburzenie  $\varepsilon_t$  o skali jednego odchylenia standardowego przedstawiono na rysunku 8 czarną linią.

W wyniku zaburzenia technologicznego gospodarka doświadcza przejściowego okresu podwyższonej produktywności, przy czym, ze względu na wysoką inercyjność procesu opisującego kształtowanie się technologii, okres ten jest relatywnie długi. Wysoka produktywność implikuje wysoki krańcowy produkt pracy i kapitału, co znajduje

odzwierciedlenie odpowiednio w wyższej płacy realnej i stopie zwrotu z kapitału<sup>25</sup> oraz prowadzi do zwiększenia nakładu obu czynników produkcji, przy czym zwiększenie nakładu kapitału wymaga oczywiście wzrostu inwestycji. W konsekwencji, przyrost produktu jest większy niż wynikałoby to ze wzrostu produktywności, tak więc pierwotny impuls technologiczny ulega, poprzez mechanizmy działające w modelu, amplifikacji. Wyższa produkcja umożliwia wyższe wydatki konsumpcyjne, przy czym ich reakcja jest zdecydowanie słabsza niż inwestycji ze względu na motyw wygładzania konsumpcji: gospodarstwa domowe starają się rozłożyć zwiększone możliwości konsumpcyjne na wiele okresów. Do tego celu służą im właśnie inwestycje, umożliwiające akumulację kapitału, który może zostać wykorzystany w późniejszych okresach.<sup>26</sup>

Wraz z wygasaniem impulsu technologicznego, oddziaływanie omówionych mechanizmów ulega stopniowemu wygasaniu, a w przypadku niektórych zmiennych nawet odwróceniu. W szczególności, po pewnym czasie stopa procentowa spada poniżej swojego długookresowego poziomu. Dzieje się tak dlatego, że wzmożona akumulacja kapitału stopniowo zmniejsza jego zyskowność (pamiętajmy, że przyjęta funkcja produkcji implikuje malejący krańcowy produkt kapitału) i efekt ten w pewnym momencie przeważa nad korzystnym, lecz wygasającym wpływem podwyższonej produktywności (wzmacnianym podwyższonym nakładem pracy).

W dalszej fazie impulsu dominują już opisane w poprzedniej sekcji mechanizmy przywracające gospodarkę (dysponującą tym razem zbyt dużym, w stosunku do długookresowego poziomu, zasobem kapitału) do stanu stacjonarnego. Kapitał ulega stopniowej deakumulacji. Następuje to poprzez spadek inwestycji, prowadząc do uwolnienia części środków na konsumpcję, dzięki czemu może być ona utrzymana na podwyższonym poziomie także w okresie, gdy produktywność praktycznie wróciła do swojego wyjściowego poziomu.

Jak można zaobserwować na rysunku 8, w naszym wariacie bazowym reakcje na impuls wszystkich zmiennych makroekonomicznych charakteryzuje wysoki stopień inercyjności. Na przykład podwyższony poziom produktu utrzymuje się przez wiele okresów, czyli jego autokorelacja jest wysoka. Takie zachowanie się makrokategorii jest spójne z

---

<sup>25</sup> Płacę realną, równą krańcowemu produktowi pracy, można zapisać po log-linearyzacji jako  $\hat{w}_t = \hat{A}_t + \alpha \hat{k}_t - \alpha \hat{N}_t$ , natomiast stopę zwrotu z kapitału, zgodnie z przedstawioną interpretacją wzoru (3.16), jako  $\hat{r}_t = \hat{\lambda}_t - E_t \hat{\lambda}_{t+1}$ .

<sup>26</sup> W tym sensie silna początkowa reakcja inwestycji jest więc odzwierciedleniem wygładzania konsumpcji.

obserwacjami empirycznymi omówionymi na początku tego tekstu. Jak się okazuje, wynika ono w przeważającym stopniu z inercyjności siły sprawczej, czyli procesu produktywności.

Żeby się o tym przekonać, rozważmy analogiczne reakcje na impuls, tym razem przyjmując, że proces opisujący technologię nie wykazuje żadnej inercyjności (czyli  $\rho = 0$ ). Impuls technologiczny prowadzi więc do podwyższonej produktywności tylko w jednym okresie. Skutki takiego założenia można prześledzić studiując jasnoszare linie na rysunku 8.

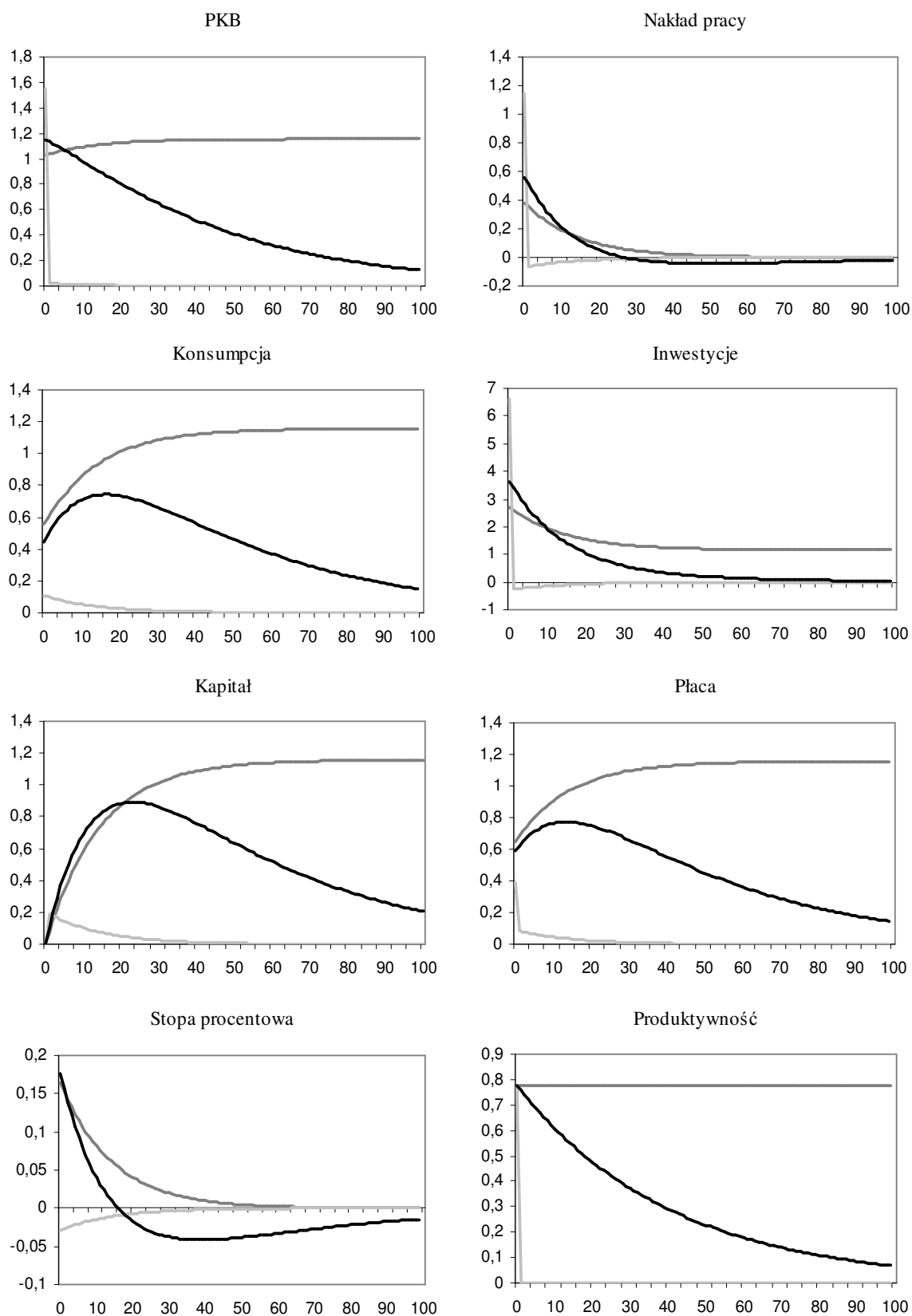
Przy takiej parametryzacji procesu technologicznego, wzrost nakładu pracy i inwestycji jest wyraźnie silniejszy niż w naszym wariacie bazowym, aczkolwiek trwa tylko jeden okres, po którym następuje natychmiastowy spadek poniżej ich długookresowego poziomu. Gwałtowny wzrost nakładu pracy wynika z chęci wykorzystania jej chwilowo wysokiego produktu krańcowego, co zresztą znajduje odzwierciedlenie we wzroście płacy realnej. Wysoki wzrost inwestycji jest natomiast wyłącznie efektem motywu wygładzania konsumpcji, czyli chęci rozłożenia chwilowego wzrostu możliwości produkcyjnych na większą liczbę okresów. W istocie, omówiony wcześniej kanał stopy procentowej działa tym razem w przeciwnym kierunku. Dzieje się tak dlatego, że stan wyższej produktywności i nakładu pracy trwa tylko jeden okres, co oznacza brak czynników wpływających dodatnio na przyszły poziom krańcowego produktu kapitału, negatywnie oddziałuje na niego natomiast podwyższony zasób kapitału.

Skutek oddziaływania tych wszystkich mechanizmów jest taki, że już w pierwszym okresie po ustąpieniu stanu wyższej produktywności w gospodarce działają wyłącznie dostosowania opisane w poprzedniej sekcji, czyli sprowadzające nieco podwyższony zasób kapitału z powrotem do jego długookresowego poziomu. Podsumowując powyższe obserwacje należy więc stwierdzić, że standardowy model realnego cyklu praktycznie nie posiada wewnętrznych mechanizmów propagacyjnych i aby uzyskać z niego ścieżki zmiennych o inercyjności obserwowanej w danych konieczne jest założenie o inercyjności samego procesu produktywności.

Na koniec zwróćmy uwagę, jak istotne różnice w stosunku do naszego bazowego wariantu otrzymujemy przy założeniu, że zaburzenie technologiczne nie ma charakteru przejściowego, lecz trwałe ( $\rho = 1$ ). Odpowiednie reakcje zmiennych makroekonomicznych przedstawiono ponownie na rysunku 8, tym razem ciemnoszarą linią.

Trwała zmiana technologiczna oznacza, że produkt, jego komponenty, kapitał i płace realne muszą ostatecznie osiągnąć nowy, wyższy stan stacjonarny. Proces ten, analogiczny do omawianego w poprzedniej sekcji, przebiega stopniowo, zgodnie ze stopniową akumulacją kapitału, częściowo przyspieszaną zwiększeniem nakładu pracy.

## Rysunek 8. Reakcja na zaburzenie technologiczne



Uwagi: czarna linia – wariant bazowy ( $\rho = 0,9758$ ), ciemnoszara linia – bardzo wysoka inercja zaburzenia technologicznego ( $\rho = 1$ ), jasnoszara linia – zerowa inercja zaburzenia technologicznego ( $\rho = 0$ ); wszystkie zmienne wyrażono jako procentowe odchylenie od (w przypadku  $\rho = 1$ , początkowego) stanu stacjonarnego; jednostka czasu to jeden kwartał

Na podstawie porównania reakcji gospodarki na impulsy produktywności o różnej inercyjności można wysnuć następującą zależność: im bardziej inercyjna (długotrwała) zmiana technologiczna, tym silniejsza reakcja konsumpcji, słabsza natomiast nakładu pracy i inwestycji. Analizując tę zależność wygodnie jest odwołać się do dobrze znanego z mikroekonomii efektu dochodowego. Im dłużej gospodarka może korzystać z podwyższonej produktywności, tym zasobniejsze stają się gospodarstwa domowe. Efektem jest relatywnie silna skłonność do zwiększenia konsumpcji i niechęć do spadku czasu wolnego, a dobra te niejako rywalizują odpowiednio z inwestycjami i czasem poświęconym pracy.

#### 4.4. Rozwiązanie stochastyczne modelu a typowe własności cyklu

Często stosowaną metodą oceny adekwatności modelu realnego cyklu jest porównanie implikowanych przez niego momentów z momentami uzyskiwanymi dla faktycznych danych. Standardowo rozpatrywanym zestawem statystyk jest odchylenie standardowe, autokorelacja oraz korelacja z PKB, mierzące odpowiednio zmienność, inercyjność oraz cykliczność danej zmiennej. Taki zestaw momentów wykorzystamy także do ceny naszego prostego modelu. Wyniki dla głównych zmiennych w nim występujących przedstawiono w tabeli 1. Podobnie jak w części drugiej, koncentrujemy się na procentowych odchyleniach od trendu wyznaczonego z wykorzystaniem filtru HP. Dla zachowania porównywalności, ten sam zabieg stosujemy przy obliczaniu momentów uzyskanych z naszego modelu.

**Tabela 1. Dopasowanie modelu do danych**

	Odch. standardowe		Autokorelacja		Korelacja z PKB	
	Dane	Model	Dane	Model	Dane	Model
PKB	1,50	1,51	0,84	0,72	1,00	1,00
Konsumpcja prywatna	1,18	0,66	0,85	0,79	0,86	0,93
Inwestycje	4,14	4,69	0,90	0,71	0,90	0,98
Godziny przepracowane	1,26	0,73	0,87	0,71	0,86	0,96
Kapitał	0,54	0,48	0,95	0,96	0,07	0,40
Płace	0,78	0,81	0,80	0,77	0,10	0,97
Stopa procentowa	1,24	0,23	0,74	0,71	0,49	0,94

Uwagi: Obliczenia przeprowadzono na zmiennych wyrażonych jako procentowe odchylenie od ich trendu HP

Pierwszą obserwacją rzucającą się w oczy jest to, że zaburzenie technologiczne generuje w rozpatrywanym prostym modelu realnego cyklu koniunkturalnego praktycznie

identyczną zmienność produktu jak obserwujemy w danych.<sup>27</sup> Podobnie jak w przypadku rzeczywistych szeregów czasowych, inwestycje są zdecydowanie bardziej, a wydatki konsumpcyjne zdecydowanie mniej wrażliwe niż PKB. Ponadto, model dosyć dobrze odwzorowuje zmienność kapitału i płac realnych, niedoszacowuje natomiast zmienność nakładu pracy oraz realnej stopy procentowej.

Zmienne generowane przez model są silnie inercyjne, aczkolwiek na ogół w nieco mniejszym stopniu niż obserwuje się w danych. Jak już wspomniano, właściwość ta jest pochodną relatywnie słabych mechanizmów propagacji zaburzeń technologicznych rozpatrywanego standardowego modelu.

Wreszcie, zgodnie z danymi, model implikuje procykliczność głównych kategorii makroekonomicznych, aczkolwiek generowane przez niego korelacje są w większości przypadków zdecydowanie silniejsze niż faktycznie obserwowane. Dotyczy to szczególnie płac realnych, a także kapitału i realnej stopy procentowej.

## **5. Źródła sukcesu, krytyka i rozszerzenia**

Przedstawione powyżej implikacje ilościowe prostego modelu realnego cyklu koniunkturalnego, w którym jedynym źródłem zaburzeń losowych są wahania produktywności, okazują się być zgodne z wieloma jakościowymi i ilościowymi regularnościami obserwowanymi w cyklu. Wynik ten, zaprezentowany po raz pierwszy w (jak się okazało) przełomowej pracy Kydlanda i Prescottta (1982), przyjęty został przez ekonomistów z niedowierzaniem, które w coraz większym ich gronie przeradzało się w entuzjazm. Aby zrozumieć to zaskoczenie środowiska warto przypomnieć, że podstawowy model realnego cyklu jest niezwykle prosty. W szczególności, nie ma w nim rządu, niedoskonałości rynku, kosztów dostosowań ograniczających możliwości optymalizacyjne gospodarstw domowych, a oczekiwania są w pełni racjonalne, podczas gdy wymienione elementy uznawane były wcześniej za niezbędne dla uzyskania realistycznego opisu fluktuacji makroekonomicznych (Plosser, 1989).

Nie powinno więc dziwić, że artykuł Kydlanda i Prescottta (1982) wywołał całą lawinę dalszych badań z wykorzystaniem zaproponowanego przez nich aparatu, tworząc nowy i niezwykle wpływowy nurt badań naukowych. Nie zabrakło oczywiście także krytyków tego podejścia, rekrutujących się zwłaszcza z grona makroekonomistów tradycyjnej szkoły

---

<sup>27</sup> Ta niemal dokładna zgodność jest w pewnym stopniu skutkiem zastosowania bardzo prostej metody oszacowania kapitału, której wtórnym wynikiem jest nieco większa zmienność reszty Solowa niż podaje się w literaturze. Klasyczne prace wskazują, że model realnego cyklu wyjaśnia ok. 75% zmienności produktu (Prescott, 1986).

keynesowskiej. Krytyka ta dotyczyła wielu obszarów, poczynając od konstrukcji teoretycznej, poprzez kalibrację i dobór zaburzeń, a kończąc na lansowanej przez badaczy szkoły realnego cyklu metodzie oceny adekwatności modelu i wyciąganych z niej wnioskach. Wytykane niedoskonałości pionierskiego podejścia Kydlanda i Prescottta doprowadziły jednak przede wszystkim do wielu bardzo interesujących rozszerzeń, nie osłabiły natomiast atrakcyjności postulowanej przez nich metody badań. Wręcz przeciwnie, dynamiczne stochastyczne modele równowagi ogólnej (DSGE), o silnych mikropodstawach bazujących na optymalizacyjnym zachowaniu się podmiotów gospodarczych, stały się szeroko (a czasem jedynym) akceptowanym narzędziem do uprawiania analizy makroekonomicznej, stosowanym także przez inne, rywalizujące z nurtem realnego cyklu, szkoły.

Podstawowy model stosowany obecnie przez szkołę neokeynesowską jest właśnie modelem klasy DSGE, w którym uchylono założenie o doskonałej konkurencji na rynku dóbr oraz elastycznych cenach.<sup>28</sup> W efekcie powstało narzędzie umożliwiające rygorystyczną analizę różnych wariantów polityki pieniężnej, które ukształtowało sposób myślenia i działania instytucji monetarnych na całym świecie.

Ogromny postęp w modelowaniu gospodarki z użyciem modeli klasy DSGE nie oznacza, że wszystkie stojące przed nimi wyzwania zostały przezwyciężone. Intensywne badania prowadzone są bardzo szerokim frontem zarówno w obszarze teoretycznym, jak i ekonometrycznym. W historii ekonomii trudno jest wskazać równie spektakularną, pionierską i inspirującą rewolucję metodologiczną jak ta zapoczątkowana przez Kydlanda i Prescottta.

---

<sup>28</sup> Podstawowy model neokeynesowski opisuje artykuł Claridy, Gali'ego i Gertlera (1999). Swoistą biblią tego nurtu jest praca Woodforda (2003).



## Literatura

Blanchard O., Khan C., *The solution of difference equations under rational expectations*, "Econometrica" 1980, vol. 48, s. 1305-1311.

Barro R.J., Sala-I-Martin X., *Economic growth*, MIT Press, 2004.

Brock W.A., Mirman L.J., *Optimal economic growth and uncertainty: The discounted case*, "Journal of Economic Theory" 1972, vol. 4, s. 479-513.

Canova F., *Methods for applied macroeconomic research*, Princeton University Press, 2007.

Clarida R., Gali J., Gertler M.L., *The science of monetary policy: A new keynesian perspective*, "Journal of Economic Literature" 1999, vol. 37(4), s. 1661-1707.

Cooley T.F., Prescott E.C., *Economic growth and business cycles*, w: *Frontiers of business cycle research*, rozdz. 1, red. T.F. Cooley, Princeton University Press, 1995, s. 1-38.

Danthine J.-P., Donaldson J.B., *Computing equilibria of nonoptimal economies*, w: *Frontiers of business cycle research*, rozdz. 1, red. T.F. Cooley, Princeton University Press, 1995, s. 65-97.

Debreu G., *Valuation equilibrium and Pareto optimum*, "Proceedings of the National Academy of Science of the U.S." 1954, vol. 38, s. 886-893.

Friedman M., *The role of monetary policy*, "American Economic Review" 1968, vol. 58(2), s. 1-17.

Hansen G.D., *Indivisible labor and the business cycle*, "Journal of Monetary Economics" 1985, vol. 16, s. 309-327.

Hansen G.D., Prescott E.C., *Recursive methods for computing equilibria of business cycle models*, w: *Frontiers of business cycle research*, rozdz. 1, red. T.F. Cooley, Princeton University Press, 1995, s. 39-64.

Hodrick R., Prescott E.C., *Post-war business cycles: An empirical investigation*, "Journal of Money, Credit, and Banking" 1997, vol. 29(1), s. 1-16.

King R.G., *Quantitative theory and econometrics*, "Federal Reserve Bank of Richmond Economic Quarterly" 1995, vol. 81, s. 53-105.

King R.G., Plosser C.I., Rebelo S.T., *Production, growth and business cycles: I. The basic neoclassical model*, "Journal of Monetary Economics" 1988, vol. 21, s. 195-232.

King R.G., Plosser C.I., Rebelo S.T., *Production, growth and business cycles: I. New directions*, "Journal of Monetary Economics" 1988, vol. 21, s. 309-341.

King R.G., Rebelo S.T., *Resuscitating real business cycles*, w: *Handbook of macroeconomics*, t. 1, rozdz. 14, red. J.B. Taylor, M. Woodford, Elsevier, 1999, s. 927-1007.

Kydland F.E., Prescott E.C., *Time to build and aggregate fluctuations*, "Econometrica" 1982, vol. 50(6), s. 1345-1370.

Long J.B., Plosser C.I., *Real business cycles*, "Journal of Political Economy" 1983, vol. 91(1), s. 39-69.

Lucas R.E. Jr., *Econometric policy evaluation: A critique*, "Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy" 1976, vol. 1(1), s. 19-46.

Lucas R.E. Jr., *Methods and problems in business cycle theory*, "Journal of Money, Credit and Banking" 1980, vol. 12, s. 696-715.

Plosser C.I., *Understanding real business cycles*, "The Journal of Economic Perspectives" 1989, vol. 3(3), s. 51-78.

Prescott E.C., *Theory ahead of business cycle measurement*, "Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy" 1986, vol. 25(1), s. 11-44.

Rebelo S., *Real business cycle models: Past, present, and future*, "Scandinavian Journal of Economics" 2005, vol. 107(2), s. 217-238.

Solow R., *Technical change and the aggregate production function*, "Review of Economic Studies" 1957, vol. 39, s. 312-320.

Stokey N.L., Lucas R.E. Jr., Prescott E.C., *Recursive methods in economic dynamics*, Harvard University Press, 1989.

Uhlig H., *A toolkit for analyzing nonlinear dynamistochastic models easily*, w: *Computational methods for the study of dynamic economies*, rozdz. 3, red. R. Marimon, A. Scott, Oxford University Press, 1999, s. 30-62.

Woodford M., *Interest and prices: Foundations of a theory of monetary policy*, Princeton University Press, 2003.

## Załącznik matematyczny

### A.1. Dynamiczna optymalizacja

W prezentacji rozwiązania zagadnienia dynamicznej optymalizacji zadanej przez rozpatrywany przez nas model realnego cyklu posłużymy się metodą mnożników (funkcji) Lagrange'a. Narzędzie to stanowi podstawowy element warsztatu każdego ekonomisty, a przez to jego wykorzystanie do analizy dynamicznych stochastycznych modeli równowagi ogólnej jest obecnie bardzo popularne.<sup>29</sup>

Problem optymalizacyjny gospodarstw domowych polega na maksymalizacji użyteczności zadanej równaniem (3.13), przy ograniczeniach wyrażonych przez równania (3.3), (3.9), (3.10), (3.11) i (3.12), początkowy zasób kapitału  $k_t$  oraz tzw. warunek transwersalności, który omówimy szczegółowo później. Wykorzystując te ograniczenia do eliminacji niektórych zmiennych, funkcję Lagrange'a tak zdefiniowanego zagadnienia można zapisać w następującej postaci:

$$\ell = E_t \left\{ \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j \left[ \ln c_{t+j} + \theta \ln(1 - N_{t+j}) + \lambda_{t+j} (A_{t+j} k_{t+j}^\alpha N_{t+j}^{1-\alpha} + (1 - \delta)k_{t+j} - c_{t+j} - (1 + \gamma)k_{t+j+1}) \right] \right\} \quad (\text{A.1.1})$$

gdzie  $\lambda_t$  jest mnożnikiem Lagrange'a odpowiadającym ograniczeniom, sprowadzonym w tym przypadku do jednego równania.

Ze względu na element niepewności, optymalizacja dokonywana przez gospodarstwa domowe ma charakter dynamiczny, lecz wymagający aktualizacji wraz ze zmieniającą się wraz z upływem czasu wiedzą odnośnie przyszłości. Tak więc w każdym okresie  $t$  gospodarstwa domowe decydują o bieżącej konsumpcji  $c_t$ , bieżącym nakładzie pracy  $N_t$  oraz zasobie kapitału w następnym okresie  $k_{t+1}$ , formułując plany co do przyszłych realizacji tych wartości w oparciu o obserwowany bieżący stan produktywności  $A_t$ .<sup>30</sup>

Różniczkując funkcję  $\ell$  względem  $c_t$ ,  $N_t$  oraz  $k_{t+1}$  otrzymujemy warunki konieczne zapisane w tekście głównym wzorami (3.14)-(3.16). Zauważmy, że pierwszy z nich definiuje  $\lambda_t$  jako pochodną funkcji użyteczności po konsumpcji, przez co można go interpretować jako krańcową użyteczność konsumpcji.

---

<sup>29</sup> Techniczne omówienie różnych metod dynamicznej optymalizacji można znaleźć u Stokey, Lucasa i Prescottta (1989).

<sup>30</sup> Proces kształtujący  $A_t$  ma charakter autoregresyjny (por. wzór (3.6)), tak więc bieżące obserwacje produktywności pomagają prognozować także jej przyszłe realizacje.

Pozostaje nam tylko omówić wspomniany wcześniej warunek transwersalności. Jest on odpowiednikiem warunków końcowych w zagadnieniach optymalizacyjnych o skończonym horyzoncie i wyraża się następującym wzorem:

$$E_t \left\{ \lim_{j \rightarrow \infty} \beta^{t+j} \lambda_{t+j} k_{t+j} \right\} = 0 \quad (\text{A.1.2})$$

Warunek ten oznacza, że przy optymalnym wyborze wyrażona w jednostkach użyteczności wartość kapitału musi zbiegać do zera. Podobnie jak w modelu Ramseya (por. Barro i Sala-I-Martin, 2004, rozdz. 2.6.2), rolą warunku transwersalności jest „zakotwiczenie” planowanej ścieżki konsumpcji, tak aby była ona zgodna z warunkami optymalności oraz ograniczeniem nieujemności zasobu kapitału (czyli wykluczała tzw. schemat Ponzi’ego).

## A.2. Log-linearyzacja

Aproksymację logarytmiczno-liniową równań modelu, zwaną często log-linearyzacją, wygodnie jest przedstawić jako dwuetapową procedurę.

W pierwszym kroku sprowadzamy wszystkie równania modelu do postaci, w której zmienne modelu wyrażone są jako logarytmiczne odchylenia od swoich wartości w stanie stacjonarnym. Wykorzystuje się w tym celu następującą tożsamość:

$$z_t = z \frac{z_t}{z} = z \exp(\ln z_t - \ln z) = z \exp(\hat{z}_t) \quad (\text{A.2.1})$$

gdzie  $z_t$  jest dowolną zmienną modelu, natomiast  $z$  oznacza jej wartość w stanie stacjonarnym. Otrzymujemy w ten sposób system równań, w których zmienne w postaci wyjściowej  $Z_t = \{z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{nt}\}$  zastąpione zostały ich transformacją  $\hat{Z}_t = \{\hat{z}_{1t}, \hat{z}_{2t}, \dots, \hat{z}_{nt}\}$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę zmiennych endogenicznych modelu.<sup>31</sup>

W drugim kroku przekształcone równania zapisuje się w postaci liniowej względem przekształconych zmiennych, wykorzystując rozwinięcie Taylora pierwszego rzędu wokół stanu, w którym wszystkie zmienne modelu znajdują się na swoich poziomach zgodnych ze stanem stacjonarnym, co na mocy (A.2.1) odpowiada  $\hat{Z}_t = \{0, 0, \dots, 0\}$ .

Dla przykładu, jeśli równanie modelu ma postać:

$$f(\hat{z}_{1t}, \hat{z}_{2t}, \dots, \hat{z}_{nt}) = 0 \quad (\text{A.2.2})$$

jego log-liniowe przybliżenie wyraża się następującym wzorem:

<sup>31</sup> Jak widać z formuły (A.2.1), skutkiem dokonanego przekształcenia jest pojawienie się wartości zmiennych endogenicznych w stanie stacjonarnym. Te są jednak wyłącznie funkcją parametrów modelu, mogą być więc traktowane jako takowe.

$$\sum_{j=1}^n f_j(0,0,\dots,0)\hat{z}_{jt} = 0 \quad (\text{A.2.3})$$

gdzie  $f_j$  jest pierwszą pochodną funkcji  $f$  po  $j$ -tej zmiennej.

W analogiczny sposób otrzymujemy aproksymacje bardziej złożonych równań, w tym tych zawierających oczekiwania. Dla przykładu, logarytmiczno-liniową aproksymacją równania:

$$E_t \{f(\hat{z}_{1t}, \hat{z}_{2,t+1})\} = 0 \quad (\text{A.2.4})$$

jest wyrażenie:

$$E_t \{f_1(0,0)\hat{z}_{1t} + f_2(0,0)\hat{z}_{2,t+1}\} = 0 \quad (\text{A.2.5})$$

Przedstawiona powyżej procedura ma charakter ogólny i może być zastosowana do jakiegokolwiek równania dynamicznego modelu ekonomicznego z racjonalnymi oczekiwaniami. W praktyce jednak bezpośrednio jej zastosowanie nie jest często konieczne i wystarczające okazuje się skorzystanie z kilku prostych reguł (por. Uhlig, 1999).

Po pierwsze, zauważmy, że dla małych  $\hat{z}_t$  (a takie tylko zazwyczaj rozpatrujemy analizując modele cyklu) możemy zastosować następujące przybliżenia:<sup>32</sup>

$$\exp(\hat{z}_t) \approx 1 + \hat{z}_t \quad (\text{A.2.6})$$

$$(1 + \hat{z}_t)^b \approx 1 + b\hat{z}_t \quad (\text{A.2.7})$$

$$\hat{z}_{it} \hat{z}_{jt} \approx 0 \quad (\text{A.2.8})$$

dla dowolnej liczby rzeczywistej  $b$  oraz dowolnych  $i$  i  $j$  indeksujących zmienne modelu.

Równania (A.2.6)-(A.2.8) implikują w szczególności:

$$z_t \approx z(1 + \hat{z}_t) \quad (\text{A.2.9})$$

$$z_{1t} z_{2t} \approx z_1 z_2 (1 + \hat{z}_{1t} + \hat{z}_{2t}) \quad (\text{A.2.10})$$

$$z_t^b \approx z^b (1 + b\hat{z}_t) \quad (\text{A.2.11})$$

Wykorzystanie powyższych reguł oraz faktu, że każde wyjściowe równanie modelu zachodzi także dla stanu stacjonarnego jest wystarczające do log-linearyzacji równań w rozpatrywanym przez nas modelu realnego cyklu.

Na koniec zwróćmy uwagę, że podstawowym celem log-linearyzacji jest sprowadzenie równań modelu do postaci liniowej względem jego (przetransformowanych) zmiennych. Taka postać znacznie ułatwia rozwiązanie systemów zawierających racjonalne oczekiwania. Zauważmy, że z tego punktu widzenia pierwszy z opisanych kroków procedury

<sup>32</sup> Formalnie, (A.2.6) oraz (A.2.7) otrzymujemy stosując rozwinięcie Taylora pierwszego rzędu odpowiednio dla funkcji wykładniczej i potęgowej.

aproxymacji nie jest niezbędny. Równie dobrze można byłoby zastosować rozwinięcie Taylora dla równań w postaci wyjściowej, pomijając transformację opisaną formułą (A.2.1). Otrzymalibyśmy w efekcie system równań liniowych względem bezwzględnych (a nie logarytmicznych) odchyleń zmiennych od ich wartości w stanie stacjonarnym, do rozwiązania którego można byłoby wykorzystać identyczne metody jak po log-linearyzacji.

Względem tak opisanej uproszczonej procedury, zwanej aproxymacją liniową (lub po prostu linearyzacją), log-linearyzacja posiada pewną przewagę praktyczną. Zwróćmy bowiem uwagę, że odchylenia logarytmiczne można w przybliżeniu interpretować jako odchylenia procentowe, co często ułatwia analizę i prezentację wyników.