Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej

dr Łukasz Woźny, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie

NBP, Marzec 2011

Program Dzień 1

1. Równowagowe modele gospodarki statycznej
2. Wybrane elementy pozytywnej teorii równowagi
3. Równowagowe modele gospodarki dynamicznej
4. Metody rekursywne
5. Model DSGE

Wprowadzenie do teorii równowagi ogólnej

- Dynamiczne, stochastyczne modele równowagi ogólnej (DSGE)
- Dlaczego warto studiować modele DSGE?
- Uwagi metodologiczne

Outline

Definicja gospodarki

- I konsumentów: $(X_i, u_i, w_i)_{i \in I}$, gdzie X_i to zbiór konsumpcyjny, $w_i \in X_i$ wyposażenie początkowe, a $u_i : X_i \to \mathbb{R}$ to funkcja użyteczności,
- J firm: $(Y_j)_{j \in J}$, gdzie Y_j to zbiory produkcyjne, $Y_j \ni y_j = (y_j^1, y_j^2, \dots, y_j^L)$; jeżeli $y_j^l < 0$ to l jest nakładem netto, a jeżeli $y_j^l > 0$ to l jest wynikiem produkcji netto,
- prawa własności: $\theta_{i,j} \geq 0$, $\sum_{i \in I} \theta_{i,j} = 1 \forall i$.

Example

- $X_i = \mathbb{R}_+^L$, $X_i = \mathbb{R}_+ \times [0,1]$, $X_i = l_\infty(\mathbb{R}_+ \times [0,1])$, $X_i = L_\infty(S, \mathcal{S}, \mu)$,
- $Y_j = \{(-k, -l, z) : k \geq 0, l \geq 0, F(k,l) \geq z\}$.

Definicja alokacji dostępnej i Pareto optymalnej

Definition

Alokacją dostępną nazywamy $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_I, y_1, y_2, \ldots, y_J)$, wtt: $\forall_i x_i \in X_i, \forall_j y_j \in Y_j$ oraz

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} w_i + \sum_{j \in J} y_j.$$

Definition

(x, y) nazywamy alokacją Pareto optymalną wtt: (x, y) jest dostępna oraz nie istnienie inna dostępna alokacja (x', y') taka, że:

$$\forall i, u_i(x_i') \geq u_i(x_i) \text{ oraz } \exists_i u_i(x_i') > u_i(x_i).$$

Równowaga Walrasowska (ADCE)

Definition

Równowagą ADCE nazywamy (x^*, y^*, p^*) takie, że:

- $\forall_i x_i^*$ rozwiązuje problem:
  $\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i)$ pw.$p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot w_i + \sum_{j \in J} \theta_{i,j} p^* \cdot y_j^*$,
- $\forall_j y_j^*$ rozwiązuje problem: $\max_{y_j \in Y_j} p^* \cdot y_j$,
- $\sum_{i \in I} x_i^* = \sum_{i \in I} w_i + \sum_{j \in J} y_j^*$.

Równowaga Walrasowska (ADCE)

Definition

(x^*, y^*, p^*) nazywamy równowagą z transferami, jeżeli istnieje wektor $(\omega_i)_{i \in I}$ taki, że $\sum_i \omega_i = p^* \cdot \sum_i w_i + \sum_j p^* \cdot y_j^*$

- $\forall_i x_i^*$ rozwiązuje problem: $\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i)$ pw.$p^* \cdot x_i \leq \omega_i$,
- $\forall_j y_j^*$ rozwiązuje problem: $\max_{y_j \in Y_j} p^* \cdot y_j$,
- $\sum_{i \in I} x_i^* = \sum_{i \in I} w_i + \sum_{j \in J} y_j^*$.

Dyskusja nad twierdzeniami teorii dobrobytu

Theorem

Niech (x^*, y^*, p^*) będzie równowagą z transferami. Jeżeli preferencje są lokalnie nienasycone, wtedy (x^*, y^*) jest Pareto optymalna.

Theorem

Niech Y_j, X_i są wypukłe oraz preferencje są wypukłe, ciągłe i lokalnie nienasycone. Niech (x^*, y^*) będzie Pareto optymalna oraz $x_i^* \gg 0$. Wtedy istnieje wektor $p^* \neq 0$ taki, że (x^*, y^*, p^*) jest równowagą z transferami.

Definicja gospodarki z niepewnością

L dóbr fizycznych. $S = \{1, \ldots, S\}$ stanów przyrody, każdy z subiektywnym prawdopodobieństwem $\pi_i(s)$, $\sum_{s \in S} \pi_i(s) = 1 \forall_i$.

- Konsumpcja warunkowana stanami przyrody $x_i : S \to \mathbb{R}^L_+$. Wyposażenie początkowe $w_i : S \to \mathbb{R}^L_+$ i użyteczność von Neumana-Morgersterna $U_i(x_i) = \sum_{s \in S} \pi_i(s) u_i(x_i(s), s)$,
- firmy: $Y_j : S \rightrightarrows \mathbb{R}^L$. Przykład: $(y_j(1), y_j(2)) = (y_j^1(1), y_j^2(1), y_j^1(2), y_j^2(2)) = (-1, 0, -1, 1)$,
- $\theta_{i,j}$.

Definicja ADCE

Definition

$x^* : S \to X_1 \times \ldots \times X_I$, $y^* \in Y_1 \times \ldots \times Y_j$ oraz $p^* : S \to \mathbb{R}^L_+$ nazywamy równowagą ADCE, wtt:

- $\forall_i x_i^*$ rozwiązuje problem: $\max_{x_i(\cdot) \in X_i} \sum_{s \in S} \pi_i(s) u_i(x_i(s), s)$pw.

$$\sum_{s \in S} p^*(s) \cdot x_i(s) \leq \sum_{s \in S} p^*(s) \cdot w_i(s) + \sum_{j \in J} \theta_{i,j} \Pi_j^*,$$

- $\forall_j y_j^*$ rozwiązuje problem: $\max_{y_j(\cdot) \in Y_j(\cdot)} \sum_{s \in S} p^*(s) \cdot y_j(s)$, oraz $\Pi_j^* = \sum_{s \in S} p^*(s) \cdot y_j^*(s)$,
- $\forall s \in S \sum_{i \in I} x_i^*(s) = \sum_{i \in I} w_i(s) + \sum_{j \in J} y_j^*(s)$.

Przykład

Example

- $I = 2, L = 1, S = 2, u_i(x, s) = \log x,\ w_1(1) = 1, w_1(2) = 0,$ $w_2(1) = 0, w_1(2) = 1,\ \pi(1) = \pi, \pi(2) = 1 - \pi.$ Normalizujemy $p^*(1) = 1.$
- $x_1(1) = \pi,\ x_1(2) = \frac{(1-\pi)}{p^*(2)},\ x_2(1) = \pi p^*(2),\ x_2(2) = (1 - \pi),$
- $p^*(2) = \frac{1}{\pi} - 1,$
- $x_1^*(1) = x_1^*(2) = \pi,\ x_2^*(1) = x_2^*(2) = 1 - \pi.$

Równowaga ADCE dla gospodarki z niepewnością

Uwagi:

- rynek na każde dobro fizyczne w każdym stanie przyrody jest w równowadze
- aktywa Arrowa (ang. Arrow-securities), tzw. rynki zupełne
- jedno ograniczenia budżetowe konsumenta
- ceny "inkorporują" niepewność
- zysk firmy niezależny od stanu (doskonałe ubezpieczenie)
- otwarcie rynków i handel przed realizacją niepewności
- wątpliwości związane z występowaniem aktywów Arrowa

Gospodarka z rynkami ubezpieczeń

Dwa okresy (przed i po zrealizowaniu niepewności).

1. W pierwszym okresie handel aktywami ubezpieczeniowymi $i_i : \{2, \dots, S\} \to \mathbb{R}^1$ o cenach $q : \{2, \dots, S\} \to \mathbb{R}^1$ (pozwalającymi na transfer dochodu pomiędzy stanem 1 a s).
2. W drugim okresie, po zrealizowaniu niepewności (np. s) otwierane są rynki na fizyczne dobra $x_i(s) \in \mathbb{R}^L_+$ po cenach $p(s) \in \mathbb{R}^L_+$

Gospodarka (wymiany) z rynkami ubezpieczeń

Definition

Alokacje $x^* : S \to X_1 \times \ldots \times X_I$, $i^* : \{2, \ldots, S\} \to \mathbb{R}^I$, oraz ceny $p^* : S \to R^L_+, q^* : \{2, \ldots, S\}$ jest równowagą IMCE (ang. insurance market competitive equilibrium):

- $\forall i \; x_i^*, i_i^*$ rozwiązują problem:
  $\max_{x_i(\cdot), i_i(\cdot)} \sum_{s \in S} \pi_i(s) u_i(x_i(s), s)$ pw.
  $p^*(1) \cdot x_i(1) + p^*(1)[\sum_{s=2}^{S} i_i(s) q^*(s)] \leq p^*(1) \cdot w_i(1)$ oraz
  $$(\forall s \in \{2, \ldots, S\}) \, p^*(s) \cdot x_i(s) \leq p^*(s) \cdot w_i(s) + p^{*,1}(s) i_i^*(s),$$
- $(\forall s \in S) \sum_i x_i^*(s) = w_i^*(s)$ oraz
  $(\forall s \in \{2, \ldots, S\}) \sum_i i_i^*(s) = 0.$

Przykład

Założenie o racjonalnych oczekiwaniach dla IMCE.

Example

$L = 1, S = 2$

(AD) $x(1) + p(2)x(2) = w(1) + p(2)w(2)$ (normalizacja $p(1) = 1$),

(IM) $x(1) + i(2)q(2) = w(1)$ oraz $x(2) = w(2) + i(2)$ (normalizacja $p(1) = 1 = p(2)$),

- Sumując:

$$x(1) + q(2)x(2) = w(1) + q(2)w(2)$$

i podstawiając $q(2) = p(2)$ alokacja ADCE= alokacji IMCE.

Gospodarka z aktywami

Dwa okresy (przed i po zrealizowaniu niepewności).

- W pierwszy okresie handel K aktywami (futures) r_k o zwrotach $r_k = (r_k(1), \ldots, r_k(S)) \in \mathbb{R}^S$,
- Przykład: aktywo "bezpieczne" $r = (1, \ldots, 1)$; aktywo Arrowa $r = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, europejska opcja kupna aktywa r po cenie c: $\tilde{r} = (\max\{0, r(1) - c\}, \ldots, \max\{0, r(s) - c\})$
- W drugim okresie handel na rynkach dóbr fizycznych (spot).

Równowaga (wymiany) Radnera

Definition

Alokacja $x^* : S \to X_1 \times \ldots \times X_I$, $z^* \in \mathbb{R}^{KI}$, oraz ceny (spot) $p^* : S \to R^L_+$, i ceny aktywów (futures) $q^* \in \mathbb{R}^K$ stanowią równowagę Radnera wtt:

- $\forall i$ plany x_i^*, z_i^* rozwiązują problem $\max_{x_i(\cdot), z_i} \sum_{s \in S} \pi_i(s) u_i(x_i(s), s)$ pw. $\sum_k q_k^* z_{i,k} \leq 0$ oraz
$$(\forall s \in S)\, p^*(s) \cdot x_i(s) \leq p^*(s) \cdot w_i(s) + \sum_k p^{*,1}(s) z_{i,k}^* r_k(s),$$
- $(\forall s \in S)$ $\sum_i x_i^*(s) = w_i^*(s)$ oraz $(\forall k)$ $\sum_i z_{i,k}^* \leq 0$.

Własności równowagi Radnera

- Struktura aktywów z macierzą zwrotów $R = \{r_k(s)\}_{k,s}$ jest zupełna wtt. rząd $R = S$.
- Jeżeli struktura aktywów jest zupełna to alokacja dóbr fizycznych w równowadze Radera z dodatnimi cenami jest równa alokacji z równowagi ADCE z dodatnimi cenami.
- Twierdzenie odwrotne także zachodzi.

Zupełność rynków i niedoskonała informacja

- wielopunktowość równowag w drugim okresie i tzw. plamy na słońcu, nieefektywność Pareto alokacji w równowadze Radnera
- cel właścicieli firmy w warunkach zupełności i niezupełności rynków
- symetryczna niedoskonała informacja: wyciąganie sygnałów z cen, więcej (informacji) nie oznacza lepiej,
- asymetryczna niedoskonała informacja: możliwość nieistnienia równowagi
- asymetryczna niedoskonała informacja (Prescott, Townsend 1984): równowaga ogólna z negatywną selekcją (Rustichini, Siconolfi 2008), i pokusą nadużycia (Jerez 2005)

Outline

Warunki istnienia równowagi

Arrow/Debreu/McKenzie bazując na twierdzeniu Kakutaniego o punkcie stałym.

- $(\forall i)\, X_i \subset \mathbb{R}^L_+$ jest wypukły i domknięty
- $(\forall i) u_i$ jest ciągła, ściśle rosnąca, quasi-wklęsła
- $w_i \gg 0$
- $(\forall j)\ Y_j \subset \mathbb{R}^L$ jest domknięty, wypukły, $0 \in Y_j$, $\mathbb{R}_- \subset Y_j$.

Wtedy istnieje równowaga ADCE.

Warunki jednoznaczności równowagi

Warunki jednoznaczności (znormalizowanej) równowagi. Funkcja nadwyżkowego popytu:

$$f(p) = \sum_i x^*(p, p \cdot w_i) - \sum_j y_j^*(p) - \sum_i w_i$$

- substytucyjność brutto funkcji nadwyżkowego popytu

$$\forall p, p', k \neq l,\ p_k = p'_k,\ p'_l > p_l \Rightarrow f_k(p') > f_k(p)\,(\forall k \neq l)$$

- Y ma stałe korzyści skali oraz f spełnia WARP:

$$\forall p, p', f(p) \neq f(p'), p \cdot f(p') \leq 0 \Rightarrow p' \cdot f(p) > 0$$

Metody rozwiązywania modeli SGE

Metoda Newtona. Niech f będzie funkcją nadwyżkowego popytu. Szukamy miejsc zerowych $f(p^*) = 0$ lub punktów stałych $g(p^*) = p^*$, gdzie $g(p) = \arg\min_{g \in \Delta}[g - p - f(p)]'[g - p - f(p)]$, gdzie $\Delta = \{p \in \mathbb{R}^L_+ : \sum_l p^l = 1\}$.
Metoda Newtona znajdowania punktów stałych g:

$$p_{t+1} = p_t - [I - Dg(p_t)]^{-1}[p_t - g(p_t)]$$

z zadanego p_0. Więcej Kehoe (1991).

Metoda homotopii

Rozmaitość równowag (Besanko)

$$H(p, \theta) = p - (1 - \theta)p_0 - \theta g(p)$$

Zauważmy, że $H(p, 1) = p - g(p)$ oraz $H(p, 0) = p - p_0$. Rozwiązujemy układ równań różniczkowych otrzymany za pomocą twierdzenia o pochodnej funkcji uwikłanej na rozmaitości $\{(p, \theta) : H(p, \theta) = 0\}$. Więcej Kehoe (1991).

Podejście Negishi

Rozpatrzmy problem maksymalizacji społecznej funkcja celu dla wag $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$:

$$\max_{x,y} \sum_i \lambda_i u(x_i) \text{ pw. } \sum_i x_i = \sum_i w_i + \sum_j y_j$$

Oznaczmy rozwiązanie: $x_i^*(\lambda)$ i mnożniki Lagrangea $p^*(\lambda) \in \mathbb{R}^L$. Policzmy konieczne transfery: $t_i(\lambda) = p^*(\lambda) \cdot [x_i^*(\lambda) - w_i]$. Szukamy miejsca zerowego odwzorowania $0 \in (t_i(\lambda))_{i \in I}$ np. metodą Newtona. Więcej Kehoe (1991).

Outline

Model dynamicznej gospodarki w warunkach pewności z reprezentatywnym gospodarstwem (DGE)

Model podstawowy (model wzrostu optymalnego)

- Dwa dobra fizyczne (dobro konsumpcyjne/kapitłowe i czas wolny) w dyskretnym czasie $0, 1, 2 \ldots,$. A więc konsumpcja jest zadana ciągami $\{c_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{1 - l_t\}_{t=0}^{\infty}$
- Jedno (reprezentatywne) gospodarstwo domowe. Preferencje zadane użytecznością:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, 1 - l_t)$$

- Technologia produkcji $y_t = F(k_t, l_t)$
- Wyposażenie: $k_0 > 0$ kapitału początkowego i jednostka czasu wolnego w każdym okresie.

Założenia

- $u : \mathbb{R}_+ \times [0,1] \to \mathbb{R}$, $1 > \beta > 0$,
- u jest ściśle wklęsła z każdym argumentem osobno, i słabo wklęsła łącznie
- u jest ograniczona i ostro rosnąca
- u jest dwukrotnie ciągle różniczkowalna (tzn. klasy $\mathcal{C}^2$),
- $F : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ma stałe korzyści skali $(AF(k,l) = F(Ak, Al))$,
- $F(0,l) = 0$,
- F jest ostro rosnąca z każdym argumentem dla dodatnich wartości drugiego argumentu,
- F jest ściśle wklęsła z każdym argumentem osobno dla dodatnich wartości drugiego argumentu,
- F jest słabo wklęsła (łącznie) i klasy $\mathcal{C}^2$,
- warunki Inady: $\lim_{k\to 0} F_1'(k,l) = \infty$, $\lim_{k\to\infty} F_1'(k,l) = 0$

Alokacja dostępna

Definition

Alokacja dostępną są ciągi: $\{c_t, i_t, l_t, y_t, k_t\}_{t=0}^{\infty}$ takie, że $(\forall t)$:

- $c_t + i_t = y_t$
- $y_t = F(k_t, l_t)$
- $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$,
- $1 \geq l_t \geq 0$,
- $c_t \geq 0, k_t \geq 0$.

Rozwiązanie Pareto optymalne

Maksymalizacja użyteczności $\equiv$ optimum Pareto (jedno gospodarstwo domowe). Upraszczające założenie (na chwilę): brak dyzużyteczności z pracy.

$$\max_{\{c_t, i_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t), \text{pw.}$$

$F(k_t, l_t) = c_t + i_t$ oraz $k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$, $c_t \geq 0, l_t \in [0, 1]$.

- czy rozwiązanie istnieje?
- czy jest jedyne?
- czy rozwiązanie c_t może być brzegowe? Dodamy założenie Inady: $\lim_{c \to 0} u'(c) = \infty$

Rozwiązanie Pareto optymalne

Oznaczając $f(k_t) = F(k_t, 1)$ problem możemy uprościć do:

$$\max_{\{k_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(f(k_t)+(1-\delta)k_t-k_{t+1}), \text{pw. } k_t \geq 0, f(k_t)+(1-\delta)k_t-k_{t+1} \geq$$

Warunki konieczne na maksymalizację:

(FOC)

$$\frac{\beta u'(f(k_t)+(1-\delta)k_t-k_{t+1})}{u'(f(k_{t-1})+(1-\delta)k_{t-1}-k_t)} = f'(k_t)+(1-\delta)$$

(TVC) $\lim_{t\to\infty} \beta^t u'(f(k_t)+(1-\delta)k_t-k_{t+1})k_{t+1} = 0$

Stan ustalony: zmodyfikowana złota reguła

Definition

Stanem ustalonym nazywamy liczbę k^* taką, że jeżeli $k_t = k^*$ to $k_{t+1} = k^*$.

Istnienie i charakterystyka dodatniego stanu ustalonego.
Zmodyfikowana złota reguła:

$$\frac{1}{\beta} = f(k^*) + (1 - \delta)$$

A więc dodatni stan ustalony (dynamiki rozwiązania optymalnego) istnieje i jest jedyny. Diagram fazowy.

Stan ustalony: złota reguła

Załóżmy, że jesteśmy w stanie ustalony. Poszukajmy optymalnej ścieżki kapitału.

$$\max_k \sum_t \beta^t u(f(k)+(1-\delta)k-k)\text{pw. } k \geq 0, f(k)+(1-\delta)k-k \geq 0.$$

$\frac{1}{1-\beta}u'(f(k)-\delta k)(f'(k)-\delta) = 0$, a więc złota reguła: $f'(k^*) = \delta$.

- maksymalizacja użyteczności w stanie ustalonym $\neq$ maksymalizacji użyteczności i potem znalezieniu stanu ustalonego.
- istnieje konsumpcja w stanie ustalonym, która jest Pareto lepsza od konsumpcji w rozwiązaniu optymalnym. Paradoks? Nie, bo ścieżka dojścia do kapitału w złotej regule jest "bolesna".

Definicja równowagi ADCE

Definition

Równowagą ADCE są ciągi $\{c_t^*, l_t^*, i_t^*, k_t^*, y_t^*, l_t^{*,f}, k_t^{*,f}\}_{t=0}^{\infty}$ oraz ceny $\{p_t^*, r_t^*, w_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ takie, że

- $\{c_t^*, l_t^*, i_t^*, k_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ rozwiązuje problem

$$\max_{\{c_t, l_t, i_t, k_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \text{ pw. } c_t \geq 0, k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t, l_t \in [0,1]$$

  i zadanym $k_0 > 0$ oraz $\sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(c_t + i_t) = \sum_{t=0}^{\infty}(w_t^* l_t + r_t^* k_t)$.
- $\{y_t^*, l_t^{*,f}, k_t^{*,f}\}_{t=0}^{\infty}$ rozwiązuje problem:

$$(\forall t) \max_{y_t, l_t^f, k_t^f} p_t^* y_t - w_t^* l_t^f - r_t^* k_t^f$$

  pw. $y_t = F(k_t^f, l_t^f)$, $k_t^f \geq 0, l_t^f \geq 0$.
- $(\forall t) l_t^* = l_t^{*,f}, k_t^* = k_t^{*,f}, y_t^* = c_t^* + i_t^*$.

ADCE: uwagi

- normalizujemy $p_0^* = 1$.
- konsument ma jedno ograniczenie budżetowe (rynku sa otwarte przed startem gospodarki)
- ponieważ F ma CRS zysku wynoszą zero. **Inaczej dla DRS**
- problem można uprościć...
- statyczny problem firmy odpowiada dynamicznemu

$$\max_{\{y_t, l_t^f, k_t^f\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} (p_t^* y_t - w_t^* l_t^f + r_t^* k_t^f)$$

- **inaczej jest w przypadku, gdy firma jest właścicielem kapitału lub występują koszty dostosowania kapitału po stronie firmy**
- ceny są w wartości bieżącej, nie trzeba dyskontować zysków firm

Charakterystyka ADCE

- $l_t^* = 1$,
- $\beta^t u'(c_t^*) = \lambda p_t^* \Rightarrow \frac{u'(c_t^*)}{\beta u'(c_{t+1}^*)} = \frac{p_t^*}{p_{t+1}^*}$
- $\lambda p_{t-1}^* - \lambda p_t^*(1-\delta) = \lambda r_t^*$
- TVC
- $p_t^* F_1'(k_t^*, l_t^*) = r_t^*$
- $p_t^* F_2'(k_t^*, l_t^*) = w_t^*$
- ograniczenie budżetowe i czyszczenie się rynków

Przekształcając:

$$\frac{u'(c_t^*)}{\beta u'(c_{t+1}^*)} = \frac{p_t^*}{p_{t+1}^*} = (1-\delta) + \frac{r_{t+1}^*}{p_{t+1}^*} = (1-\delta) + F_1'(k_{t+1}^*, l_{t+1}^*).$$

Czyli: Pierwsze Twierdzenie Ekonomii Dobrobytu.

Przykład: podatek zaburzający efektywną alokację

Rząd wprowadza liniowy podatek od zysków kapitałowych a zebrane podatki przeznacza na transfery. Równowagą ADCE dla podatku τ są ciągi $\{c_t^*, l_t^*, k_t^*, T_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ oraz ceny $\{p_t^*, r_t^*, w_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ takie, że

- $\{c_t^*, l_t^*, k_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ rozwiązuje problem

$$\max_{\{c_t, l_t, k_t\}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t) \text{ pw. } c_t \geq 0, l_t \in [0,1]$$

  i zadanym $k_0 > 0$ oraz
  $\sum_{t=0}^{\infty} p_t^*(c_t + k_{t+1} - k_t(1-\delta)) = \sum_{t=0}^{\infty}(w_t^* l_t + (1-\tau) r_t^* k_t + T_t)$.
- $\{l_t^*, k_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ rozwiązuje problem:

$$(\forall t) \max_{l_t, k_t} p_t^* F(k_t, l_t) - w_t^* l_t + r_t^* k_t$$

  pw. $k_t \geq 0, l_t \geq 0$.
- $(\forall t)\ T_t^* = \tau r_t^* k_t^*$.
- $(\forall t) F(k_t^*, l_t^*) = c_t^* + k_{t+1}^* - (1-\delta) k_t$.

Przykład: kontynuacja

Nieefektywność Pareto alokacji ADCE, a więc i w stanie ustalonym:

$$\frac{1}{\beta} = (1-\delta) + (1-\tau)f(k^*)$$

Ogólniej:

- jak porównywać konsekwencje polityki na dobrobyt?
- Dwie polityki $P1$ oraz $P2$. Rozwiązujemy ADCE i znajdujemy $\{c_t^{*,P1}\}_{t=0}^{\infty}$ oraz $\{c_t^{*,P2}\}_{t=0}^{\infty}$. Liczymy strata użyteczności wynikającą ze zmiany ścieżki konsumpcji jako % konsumpcji:

$$\sum_t \beta^t u(c_t^{*,P1}) = \sum_t \beta^t u((1+\alpha)c_t^{*,P2})$$

- w stanie ustalonym lub na całej ścieżce

Definicja równowagi sekwencyjnej

Definition

Równowagą sekwencyjną gospodarki dynamicznej są ciągi $\{c_t^*, l_t^*, k_t^*, b_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ oraz ceny $\{r_t^*, w_t^*, q_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ takie, że:

- $\{c_t^*, l_t^*, k_t^*, b_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ rozwiązuje problem

$$\max_{\{c_t, l_t, k_t, b_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0} \beta^t u(c_t) \text{ pw. } c_t \geq 0, l_t \in [0,1]$$

  i zadanym $k_0 > 0, b_{-1} = 0$, oraz **ciągu** ograniczeń: $(\forall t \geq 0)\, c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t + q_t^* b_t = r_t^* k_t + w_t^* l_t + b_{t-1}$ oraz warunku **no-Ponzi game**: $b_t + w_t^* l_t + r_t^* k_t + \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{j=0}^{s-1} q_{t+j}^* (w_{t+s}^* l_{t+s} + r_{t+s}^* k_{t+s}) \geq 0$,
- $\{l_t^*, k_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ rozwiązuje problem: $(\forall t) \max_{l_t, k_t} p_t^* F(k_t, l_t) - w_t^* l_t - r_t^* k_t$ pw. $k_t \geq 0, l_t \geq 0$.
- $(\forall t) F(k_t^*, l_t^*) = c_t^* + k_{t+1}^* - (1-\delta)k_t$, $b_t^* = 0$.

Warunki charakteryzujące alokacje i ceny

- $\beta^t u(c_t^*) = \lambda_t$
- $\lambda_{t-1} = \lambda_t(r_t^* + 1 - \delta)$
- $\lambda_t q_t^* = \lambda_{t+1}$
- $l_t^* = 1$ oraz TVC
- $F_1'(k_t^*, l_t^*) = r_t^*$,$F_2'(k_t^*, l_t^*) = w_t^*$,

Przekształcając:

$$\frac{u'(c_t^*)}{\beta u'(c_{t+1}^*)} = \frac{1}{q_t^*} = r_{t+1}^* + (1 - \delta) = F_1'(k_{t+1}^*, l_{t+1}^*) + (1 - \delta)$$

Cena q_t^* służy też do dyskontowania zysków firmy w modelach gdzie problem firmy jest dynamiczny. Cena q_t^* jest szczególnie istotna w modelach z heterogenicznymi podmiotami.

Model z elastyczną podażą pracy

Dodatkowe założenia Inady: $\lim_{l \to 0} u_2'(c, 1-l) = 0$ oraz $\lim_{l \to 1} u_2'(c, 1-l) = \infty$. Warunki charakteryzujące alokację Pareto optymalną: $\frac{u'(c_t^*)}{\beta u'(c_{t+1}^*)} = (1-\delta) + F_1'(k_{t+1}^*, l_{t+1}^*)$, TVC oraz dodatkowy

$$\frac{u_2'(c_t^*, 1-l_t^*)}{u_1'(c_t^*, 1-l_t^*)} = F_2'(k_t^*, l_t^*).$$

Warunki charakteryzujące stan ustalony:

$$\frac{1}{\beta} = (1-\delta) + F_1'(k^*, l^*) \text{ oraz } \frac{u_2'(c^*, 1-l^*)}{u_1'(c^*, 1-l^*)} = F_2'(k^*, l^*) \text{ oraz}$$

$$c^* = F(k^*, l^*) - \delta k^*.$$

Dla $u_{12}''(\cdot) \geq 0$ jest jeden dodatni stan ustalony (algorytm liczenia).

Model z elastyczną podażą pracy: ADCE

W równowadze ADCE warunki FOC:

$$\frac{u'(c_t^*)}{\beta u'(c_{t+1}^*)} = (1-\delta) + r_{t+1}^*$$

oraz

$$\frac{u_2'(c_t^*, 1-l_t^*)}{u_1'(c_t^*, 1-l_t^*)} = w_t^*$$

Analogicznie w równowadze sekwencyjnej (SMCE).

Uwagi o rozwiązywaniu modeli DGE

2 klasyczne metody:

- "schooting" (dostarczony program),
- dyskretyzacja (dostarczony program)

Aby istniała ścieżka wzrostu zrównoważonego (BGP), a więc ciąg $\{k_t^{BG}\}_{t=0}^{\infty}$ taki, że $k_{t+1}^{BG} = (1+\gamma)k_t^{BG}$:

- postęp technologiczny $A_{t+1} = \gamma^A A_t$ musi mieć formę wzbogacającego pracę w funkcji produkcji, tzn. $F(k_t, A_t l_t)$, np Cobb-Douglas
- preferencje muszą mieć postać CIES (o stałej elastyczności międzyokresowej): $\frac{cu''(c)}{u'(c)} = const$. np. $u(c) = \frac{c^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$
- w modelu z elastyczną podażą pracy dodatkowe warunki: spełnione np. przez separowalność użyteczności względem c i $1-l$

Outline

Wprowadzenie do metod rekursywnych

- Rozważmy problem: $\max_{\{s_t,a_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(s_t, a_t)$ pw. $s_{t+1} = h(s_t, a_t)$ oraz $g(s_t, a_t) \geq 0$ i zadanym s_0. **Jeden problem $T+1$ zmiennych**.
- Zamienimy go w rozwiązanie $T+1$ **razy jednego prostego problemu**.
- Rozpatrzmy ostatni okres i zadane s_T: $\max_{a_T} u(s_T, a_T)$ pw. $g(s_T, a_T) \geq 0$.
- Zapiszmy $V_0(s_T) = \max_{a_T} u(s_T, a_T)$ pw. $g(s_T, a_T) \geq 0$.
- Rozpatrzmy przedostatni okres i zadane S_{T-1}: $\max_{a_{T-1},a_T} u(s_{T-1}, a_{T-1}) + \beta u(h(s_{T-1}, a_{T-1}), a_T)$ pw. $g(s_{T-1}, a_{T-1}) \geq 0$, $g(s_T, a_T) \geq 0$
- Zauważmy, że wystarczy wybrać a_{T-1} a potem użyć funkcji V_0, tzn:

$$V_1(s_{T-1}) = \max_{a_{T-1}} u(s_{T-1}, a_{T-1}) + \beta V_0(h(s_{T-1}, a_{T-1})).$$

- Kontynuując: $\max_{a_0} u(s_0, a_0) + \beta V_{T-1}(h(s_0, a_0))$ pw. $g(s_0, a_0) \geq 0$.

Funkcja wartości

Ogólnie dla problemu z horyzontem T mamy równanie:
$V_t(s_{T-t}) = \max_{a_{T-t}} u(s_{T-t}, a_{T-t}) + \beta V_{t-1}(h(s_{T-t}, a_{T-t}))$, pw. $g(s_{T-t}, a_{T-t}) \geq 0$.

- Interesuje na problem z $T \to \infty$.
- pytanie czy istnieje granica ciągu ograniczonych funkcji $\{V_t\}_{t=0}^{\infty}$ w metryce sup?
- Kolejne elementy tego ciągu są generowane przez operator T $TV(s) = \max_a u(s, a) + \beta V(h(s, a))$, pw. $g(s, a) \geq 0$ tzn: $V_{t+1} = TV_t$.

Definition (Odwzorowanie zbliżające)

Operator $T : M \to M$ na przestrzeni metrycznej (M, d) jest odwzorowniem zbliżającym z modułem $1 > \beta > 0$, jeżeli $(\forall x, y \in M)\, d(Tx, Ty) \leq \beta d(x, y)$.

Twierdzenie Banacha

Theorem (Twierdzenie Banacha)

Niech (M, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną a $T : M \to M$ odwzorowaniem zbliżającycm z modułem β wtedy istnieje jeden punkt stały $V^* = TV^* \in M$ oraz dla każdego $x_0 \in M$ ciąg $\{V_t\}_{t=0}^{\infty}$ generowany na $V_{t+1} = TV_t$ jest zbieżny w do V^* w metryce d.

Naturalnym kandydatem na (M, d) jest $(\mathcal{C}(X), || \cdot ||)$.

Theorem (Stokey, Lucas, Prescott 1989)

Niech $1 > \beta > 0$,a u będzie ograniczone, wtedy rozwiązania problemu:

$$V(s_0) = \max_{\{a_t\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(s_t, a_t)$$

odpowiadają rozwiązaniu

$$V(s) = \max_a \{u(s, a) + \beta V(h(s, a))\}$$

Przykłady

Identyfikacja zmiennej stanu

- $\sum_t^\infty \beta^t u(c_t)$ pw. $k_{t+1} = f(k_t) + (1+\delta)k_t - c_t$ oraz
  $V(k) = \max_c\{u(c) + \beta V(f(k) + (1+\delta)k - c)\}$
- $\sum_t^\infty \beta^t u(c_t)$ pw. $k_{t+1} = f(k_t) + (1+\delta)k_t - c_t$ oraz
  $V(k) = \max_{k'}\{u(f(k) + (1+\delta)k - k') + \beta V(k')\}$
- $\sum_t^\infty \beta^t u(c_t, 1-l_t)$ pw. $k_{t+1} = f(k_t, l_t) + (1+\delta)k_t - c_t$ oraz
  $V(k) = \max_{c,l}\{u(c, 1-l) + \beta V(f(k,l) + (1+\delta)k - c)\}$
- $\sum_t^\infty \beta^t u(c_{t-1}, c_t)$ pw. $k_{t+1} = f(k_t) + (1+\delta)k_t - c_t$ oraz
  $V(k, c_-) = \max_c\{u(c_-, c) + \beta V(f(k) + (1+\delta)k - c, c)\}$
- $\sum_t^\infty \beta^t u(c_{t-1}, c_t)$ pw. $k_{t+1} = f(k_t, k_{t-1}) + (1+\delta)k_t - c_t$ oraz
  $V(k, k_-) = \max_c\{u(c) + \beta V(f(k, k_-) + (1+\delta)k - c, k)\}$

Ważne pytania i rozszerzenia

- kiedy V jest monotoniczna i ostro wklesła (SLP)?
- kiedy rozwiązanie $a^*(k)$ jest funkcją?, funkcja rosnącą (SLP)?
- kiedy V jest różniczkowalna (Benveniste, Scheinkman 1979 lub Rincon-Zapatero, Santos 2009)?
- co w przypadku nieograniczonej u (Rincon-Zapatero, Palmero 2003, 2009 lub Matkowski,Nowak 2009)?

Rozszerzenie o stochastykę:

$$V(s,z) = \max_a \{u(s,z,a) + \beta \int_Z V(h(s,a,z'),z')dQ(z'|z)\}$$

Definicja równowagi rekursywnej z pracą

Definition

Równowagą rekursywną są funkcje: V, k', l, K', L, w, r takie, że:

- $(\forall k, K)\ V(k, K) = \max_{k',l}\{u(w(K)l + r(K)k + (1-\delta)k - k', 1-l) + \beta V(k', K'(K))\}$ oraz $k'(k, K), l(k, K)$ rozwiązują prawą stronę,
- $(\forall K)\ k = K\ l = L(K)$ rozwiązują $\max_{k,l} F(k, l) - w(K)l - r(K)k$,
- $(\forall K)\ k'(K, K) = K'(K)$ oraz $l(K, K) = L(K)$,
- $(\forall K)\ w(K)l(K, K) + r(K)K = F(K, L(K))$.

Definicja równowagi rekursywnej z obligacjami

Definition

Równowagą rekursywną są funkcje: $V, k', b', K', B, w, r, q$ takie, że:

- $(\forall k, K, b, B)$ $V(k, K, b, B) = \max_{k',b}\{u(w(K, B) + r(K, B)k + (1 - \delta)k + b - k' - q(K, B)b', 1 - l) + \beta V(k', b', K'(K, B), B'(K, B))\}$ + no Ponzi, oraz $k'(k, b, K, B), b'(k, b, K, B)$ rozwiązują prawą stronę,
- $(\forall K, B)$ $k = K$ $l = 1$ rozwiązują $\max_{k,l} F(k, l) - w(K, B)l - r(K, B)k$,
- $(\forall K)$ $k'(K, 0, K, 0) = K'(K, 0)$ oraz $b'(K, 0, K, 0) = B'(K, 0)$,
- $(\forall K)$ $w(K, 0) + r(K, 0)K = F(K, 1)$, $B'(K, 0) = 0$.

Metody rozwiązywania modelu DGE

Dyskretyzacja i iteracja funkcji wartości na operatorze Bellmana.

Outline

Model DSGE

Prekursorzy: Brock, Mirman 1972, Mirman, Zilcha 1975
Równowaga rekursywna: Prescott, Mehra 1980

Definition

Równowagą rekursywną modelu DSGE są funkcje: V, k', l, K', L, w, r takie, że:

- $(\forall k, K, z)$ $V(k, K, z) = \max_{k', l}\{u(w(K, z)l + r(K, z)k + (1-\delta)k - k', 1-l) + \beta \int_Z V(k', K'(K, z), z')G(dz'|z)\}$ oraz $k'(k, K, z), l(k, K, z)$ rozwiązują prawą stronę,
- $(\forall K)$ $k = K$ $l = L(K, z)$ rozwiązują $\max_{k,l} zF(k, l) - w(K, z)l - r(K, z)k$,
- $(\forall K)$ $k'(K, K, z) = K'(K, z)$ oraz $l(K, K, z) = L(K, z)$,
- $(\forall K)$ $w(K, z)l(K, K, z) + r(K, z)K = zF(K, L(K, z))$.

Warunki określające rekursywną równowagę modelu DSGE

Założenia i warunki konieczne na wewnętrzne rozwiązanie:

$$\begin{aligned} & u_1'(c(k,K,z),1-l(k,K,z)) = \\ & \beta \int_Z (1-\delta+F_1'(K'(K,z),L'(K,z))) \times \\ \times \quad & u_1'(c(k'(k,K,z),K'(K,z),z'),1-l'(k'(k,K,z),K'(K,z),z))G(z'|z), \end{aligned}$$

gdzie $c(k,K,z) = zF(K,L(K,z)) + (1-\delta)k - k'(k,K,z)$ oraz

$$\begin{aligned} & F_2'(K,L'(K,z))u_1'(c(k,K,z),1-l(k,K,z)) = \\ = \quad & u_2'(c(k,K,z),1-l(k,K,z)) \end{aligned}$$

i nie potrzebujemy TVC.

Dane empiryczne, a intuicja wyniku

- dyskontowanie, stopa procentowa i zmiany dochodu
- **oszczędności to bufor do wygładzania konsumpcji**
- zmiany stopy procentowej
- **konsumpcja reaguje na zmiany zwrotu z oszczędności**
- szoki i rola oczekiwań
- **plan konsumpcyjny jest rewidowany po otrzymaniu nowych informacji**

Hipoteza dochodu permanentnego (Friedman (1957))
Hipoteza błądzenia losowego (Hall (1978))

Szoki i zmiany podaży pracy

Trzy komponenty:

- efekt substytucyjny (wewnątrzokresowy)
- efekt dochodowy
- efekt substytucyjny (międzyokresowy)

Dla „gładkich" preferencji **dwa pierwsze efekty się znoszą**.
Hipoteza międzyokresowej substytucji pracy (Lucas, Rapping (1969))